Практическое занятие №8
Тема: «Решение заданий на выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме».

Цель: научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.
Порядок проведения работы
$z = a + bi$ – это алгебраическая форма комплексного числа.

Сложение комплексных чисел
Пример 1
Сложить два комплексных числа $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4-5i$
Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:
$z_1 + z_2 = 1+3i+4-5i = 5-2i$
Вычитание комплексных чисел
Пример 2
Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2+i$, $z_2 = \sqrt{3}+5i$
Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:
$z_1 - z_2 = -2+i-(\sqrt{3}+5i) = -2+i-\sqrt{3}-5i = -2-\sqrt{3}-4i$
Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: $-2-\sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2-\sqrt{3})-4i$.
Рассчитаем вторую разность:
$z_2 - z_1 = \sqrt{3}+5i-(-2+i) = \sqrt{3}+5i+2-i = 2+\sqrt{3}+4i$
Здесь действительная часть тоже составная: $2+\sqrt{3}$
Умножение комплексных чисел
Пример 3
Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1-i$, $z_2 = 3+6i$
Очевидно, что произведение следует записать так:
$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i)$
Необходимо помнить, что $i^2 = -1$.
$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1\cdot 3 - i\cdot 3 + 1\cdot 6i - i\cdot 6i = 3-3i+6i+6 = 9+3i$, где
$-i\cdot 6i = -6i^2 = -6\cdot(-1) = +6$
Деление комплексных чисел
Пример 4
Даны комплексные числа $z_1 = 13+i$, $z_2 = 7-6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Вспоминаем формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7-6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7+6i$.

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7+6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7+6i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2 = -1$ и не путаемся в знаках!!!).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2} = \frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)} =$$

$$= \frac{85+85i}{49+36} = \frac{85+85i}{85} = 1+i$$

В ряде случаев перед делением дробь целесообразно упростить, например, рассмотрим частное чисел: $\frac{-7-12i}{-12+7i}$. Перед делением избавляемся от лишних минусов: в числителе и в знаменателе выносим минусы за скобки и сокращаем эти минусы: $\frac{-7-12i}{-12+7i} = \frac{-(7+12i)}{-(12-7i)} = \frac{7+12i}{12-7i}$. правильный ответ: i

Пример 5

Дано комплексное число $z = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$).

Приём тот же самый – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a-b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-(i)^2} = \frac{\sqrt{3}-i}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$$

Пример 6

Даны два комплексных числа $z_1 = 5+2i$, $z_2 = 2-5i$. Найти их сумму, разность, произведение и частное.

Задания для самостоятельного решения:

Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел в алгебраической форме.

1. $z_1 = 2 + 3i,\quad z_2 = 1 + i.$

2. $z_1 = 3 + 4i,\quad z_2 = 1 - i.$

3. $z_1 = 1 - 2i,\quad z_2 = -1 + i.$

4. $z_1 = 2 + 5i,\quad z_2 = -1 - i.$

5. $z_1 = 3 - 8i,\quad z_2 = 2 + i.$

6. $z_1 = 3 - 7i,\quad z_2 = 2 - i.$

7. $z_1 = 2 + 6i,\quad z_2 = -2 + i.$

8. $z_1 = 4 + 2i,\quad z_2 = -2 - i.$

9. $z_1 = 5 + 3i,\quad z_2 = 3 + i.$

10. $z_1 = 6 - 2i,\quad z_2 = 3 - i.$

11. $z_1 = 7 + 9i,\quad z_2 = -3 + i.$

12. $z_1 = 3 - 7i,\quad z_2 = -3 - i.$

13. $z_1 = 4 + 3i,\quad z_2 = 4 + i.$

14. $z_1 = 8 + 3i,\quad z_2 = 4 - i.$

15. $z_1 = 8 - 2i,\quad z_2 = -4 + i.$

16. $z_1 = 9 + 2i,\quad z_2 = -4 - i.$

17. $z_1 = 7 + 3i,\quad z_2 = 5 + i.$

18. $z_1 = 6 - 4i,\quad z_2 = 5 - i.$

19. $z_1 = 5 + 4i,\quad z_2 = -5 + i.$

20. $z_1 = 3 + 7i,\quad z_2 = -5 - i.$

21. $z_1 = 2 - 4i,\quad z_2 = 6 + i.$

22. $z_1 = 3 + 5i,\quad z_2 = 6 - i.$

23. $z_1 = 6 + 5i,\quad z_2 = -6 + i.$

24. $z_1 = 7 + 2i,\quad z_2 = -6 - i.$

25. $z_1 = 8 + 3i,\quad z_2 = 7 + i.$

26. $z_1 = 9 - 2i,\quad z_2 = 7 - i.$

27. $z_1 = 5 + 6i,\quad z_2 = -7 + i.$

28. $z_1 = -3 + 2i,\quad z_2 = -7 - i.$

29. $z_1 = 6 + 2i,\quad z_2 = 8 + i.$

30. $z_1 = -6 + 7i,\quad z_2 = 8 - i.$

31. $z_1 = -2 + 5i,\quad z_2 = -8 - i.$

32. $z_1 = 8 + 3i,\quad z_2 = 9 + i.$

33. $z_1 = -7 - 2i,\quad z_2 = 9 - i.$

34. $z_1 = 5 + 8i,\quad z_2 = -9 + i.$

35. $z_1 = -2 + 4i,\quad z_2 = -9 - i.$

36. $z_1 = -5 - 4i,\quad z_2 = 10 + i.$

Контрольные вопросы:

1. Что такое комплексное число?
2. Что такое мнимая единица?
3. Что такое действительная часть числа?
4. Что такое мнимая часть числа?
5. Как сравнить два комплексных числа?
6. какие числа называются сопряженными?