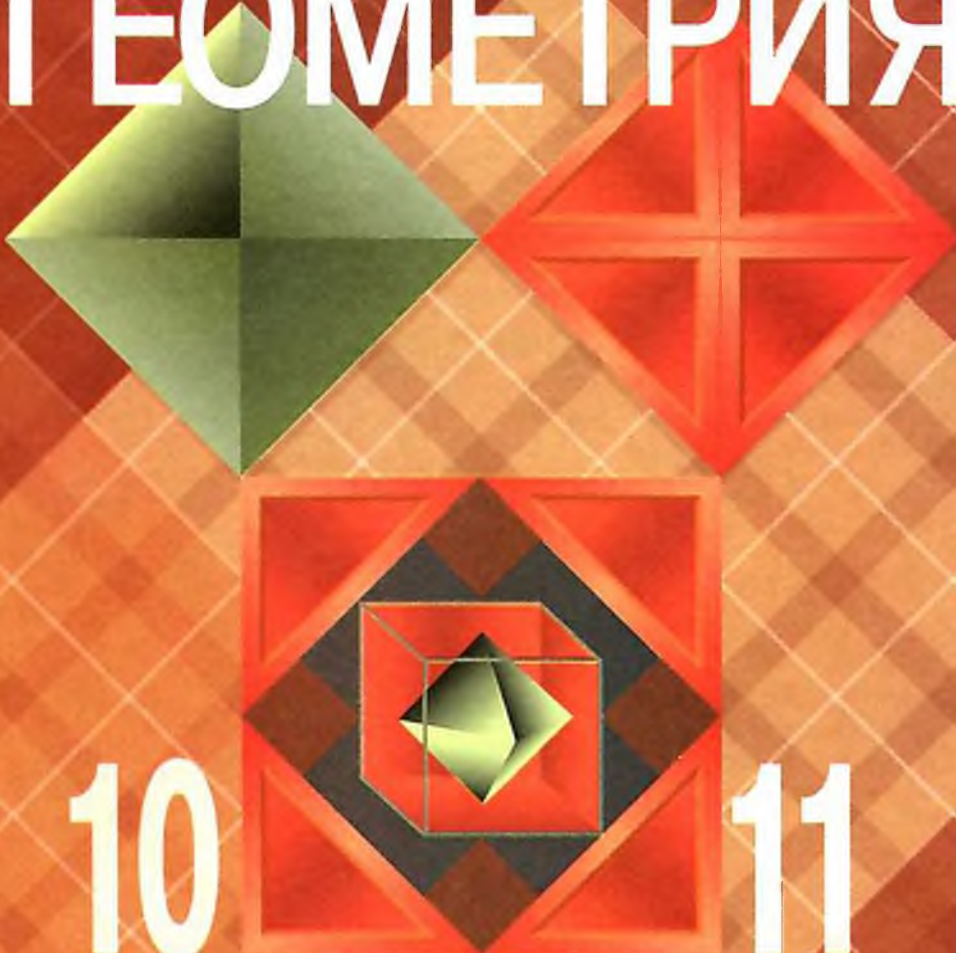
МГУ – ШКОЛЕ

ГЕОМЕТРИЯ



10 – 11

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ГЕОМЕТРИЯ

10–11 классы

Учебник для общеобразовательных учреждений

Базовый и профильный уровни

МГУ – ШКОЛЕ

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

18-е издание

Москва «Просвещение» 2009

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

Авторы: Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселева, Э. Г. Позняк

В соответствии с новым образовательным стандартом по математике в данное издание внесены существенные дополнения, подготовленные С. Б. Кадомцевым и В. Ф. Бутузовым. Бо́льшая часть нового материала является необязательной для базового уровня, она отмечена знаком *.

Издание подготовлено под научным руководством академика **А. Н. Тихонова**

Учебник занял первое место на Всесоюзном конкурсе учебников по математике для средней общеобразовательной школы

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 2-10106-5215/1416 от 25.10.06) и Российской академии образования (№ 01-16916/7д от 14.07.06)

Условные обозначения:

25* — пункт, необязательный для изучения на базовом уровне
20 — задача, не являющаяся обязательной на базовом уровне
▼ — начало материала, необязательного для изучения на базовом уровне
△ — окончание материала, необязательного для изучения на базовом уровне

Г36 **Геометрия. 10—11 классы**: учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. — 18-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 255 с. : ил. — ISBN 978-5-09-020368-5.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-020368-5

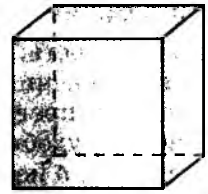
Введение

1 Предмет стереометрии

Школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В планиметрии изучаются свойства геометрических фигур на плоскости. **Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.** Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — объемный, пространственный и «метрео» — измерять.

Простейшими и, можно сказать, основными фигурами в пространстве являются **точки, прямые** и **плоскости**. Наряду с этими фигурами мы будем рассматривать **геометрические тела** и их **поверхности**. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются **многогранниками**. Одним из простейших многогранников является куб (рис. 1, *а*). Капли жидкости в невесомости принимают форму геометрического тела, называемого **шаром** (рис. 1, *б*). Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого **цилиндром** (рис. 1, *в*).

В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отделенную от остальной части пространства поверхностью — **границей** этого тела. Так, например, граница шара есть **сфера**, а граница цилиндра состоит из двух кругов — оснований цилиндра и боковой поверхности.



а)
Куб

б)
Шар

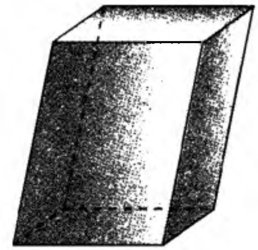
в)
Цилиндр

Рис. 1

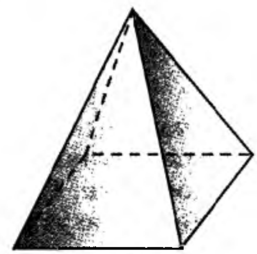
Изучая свойства геометрических фигур — воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит практическое (прикладное) значение геометрии. Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.

При изучении пространственных фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображениями на чертеже. Как правило, изображением пространственной фигуры служит ее проекция на ту или иную плоскость. Одна и та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирается то из них, которое создает правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования ее свойств. На рисунках 2, *а*, *б* изображены два многогранника — **параллелепипед** и **пирамида**, а на рисунке 2, *в* — **конус**. При этом невидимые части этих фигур изображены штриховыми линиями. Правила изображения пространственных фигур приведены в приложении 1.

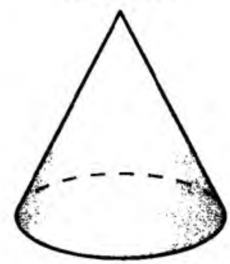
В течение двух лет мы будем изучать взаимное расположение прямых и плоскостей, многогранники, векторы и метод координат в пространстве, «круглые» геометрические тела — цилиндр, конус, шар и рассмотрим вопрос об объемах тел.



а)
Параллелепипед



б)
Пирамида



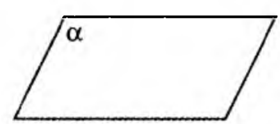
в)
Конус

Рис. 2

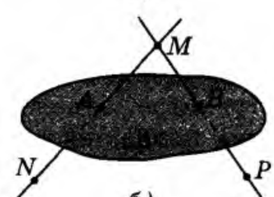
2 Аксиомы стереометрии

В планиметрии основными фигурами были точки и прямые. В стереометрии наряду с ними рассматривается еще одна основная фигура — **плоскость**. Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.

Как и ранее, точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C и т. д., а прямые — строчными латинскими буквами a, b, c и т. д. или двумя прописными латинскими буквами AB, CD и т. д. Плоскости будем обозначать греческими буквами α, β, γ и т. д. На рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма (рис. 3, *а*) или в виде произвольной области (рис. 3, *б*).



а)



б)

Рис. 3

Ясно, что в каждой плоскости лежат какие-то точки пространства, но не все точки пространства лежат в одной и той же плоскости. На рисунке 3, *б* точки A и B лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M, N, P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$.

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах. Вся система аксиом стереометрии состоит из ряда аксиом, большая часть которых нам знакома по курсу планиметрии. Полный список аксиом и некоторые следствия из них приведены в приложении 2. Здесь мы сформулируем лишь три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве. Ниже они обозначены A_1, A_2, A_3.

A_1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Иллюстрацией к этой аксиоме может служить модель, изображенная на рисунке 4. Плоскость, проходящую через точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, иногда называют плоскостью ABC.

Отметим, что если взять не три, а четыре произвольные точки, то через них может не проходить ни одна плоскость. Иначе говоря, четыре точки могут *не лежать в одной плоскости*. Каждый знаком с таким наглядным подтверждением этого факта: если ножки стула не одинаковые по длине, то стул стоит на трех ножках, т. е. опирается на три «точки», а конец четвертой ножки (четвертая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

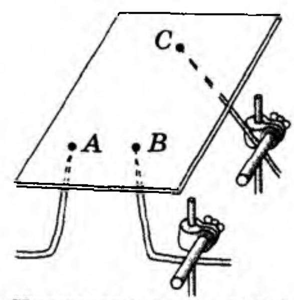


Иллюстрация к аксиоме A_1: пластинка поддерживается тремя точками A, B и C, не лежащими на одной прямой

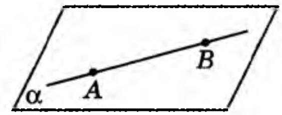
Рис. 4

A_2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости*.

* Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки» («две прямые», «три плоскости» и т. д.), будем считать, что эти точки (прямые, плоскости) различны.

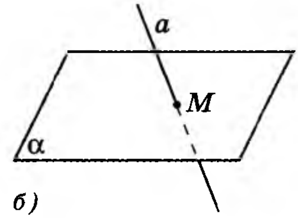
В таком случае говорят, что **прямая лежит в плоскости** или **плоскость проходит через прямую** (рис. 5, *а*).



а)
Прямая AB лежит в плоскости α

Свойство, выраженное в аксиоме A_2, используется для проверки «ровности» чертежной линейки. С этой целью линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный (прямолинейный), то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола. Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.

Из аксиомы A_2 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они **пересекаются** (рис. 5, *б*).



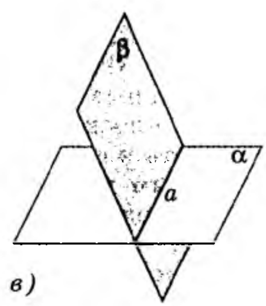
б)
Прямая a и плоскость α пересекаются в точке M

$\mathbf{A_3}$

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

В таком случае говорят, что **плоскости пересекаются по прямой** (рис. 5, *в*). Наглядной иллюстрацией аксиомы A_3 является пересечение двух смежных стен, стены и потолка классной комнаты.

Прежде чем перейти к первым следствиям из данных аксиом, отметим одно важное обстоятельство, которым будем пользоваться в дальнейшем. В пространстве существует бесконечно много плоскостей, и в каждой плоскости справедливы все аксиомы и теоремы планиметрии. Более того, признаки равенства и подобия треугольников, известные из курса планиметрии, справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях (см. приложение 2).



в)
Плоскости α и β пересекаются по прямой a

Рис. 5

3 Некоторые следствия из аксиом

Теорема

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую a и не лежащую на ней точку M (рис. 6). Докажем, что через прямую a и точку M проходит плоскость. Отметим на прямой a две точки P и Q. Точки M, P и Q не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме A_1 через эти точки проходит некоторая плоскость α. Так как две точки прямой a (P и Q) лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую a.

Рис. 6

Единственность плоскости, проходящей через прямую a и точку M, следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую a и точку M, проходит через точки M, P и Q. Следовательно, эта плоскость совпадает с плоскостью α, так как по аксиоме A_1 через точки M, P и Q проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

Теорема

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямые a и b, пересекающиеся в точке M (рис. 7), и докажем, что через эти прямые проходит плоскость, и притом только одна.

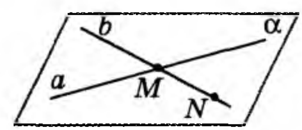


Рис. 7

Отметим на прямой b какую-нибудь точку N, отличную от точки M, и рассмотрим плоскость α, проходящую через точку N и прямую a. Так как две точки прямой b лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую b. Итак, плоскость α проходит через прямые a и b. Единственность такой плоскости следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямые a и b, проходит через точку N. Следовательно, она совпадает с плоскостью α, поскольку через точку N и прямую a проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

Вопросы и задачи

1 По рисунку 8 назовите: а) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC; б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB; в) точки, лежащие в плоскостях ADB и DBC; г) прямые, по которым пересекаются плоскости ABC и DCB, ABD и CDA, PDC и ABC.

2 По рисунку 9 назовите: а) точки, лежащие в плоскостях DCC_1 и BQC; б) плоскости, в которых лежит прямая AA_1; в) точки пересечения прямой MK с плоскостью ABD, прямых DK и BP

с плоскостью $A_1B_1C_1$; г) прямые, по которым пересекаются плоскости AA_1B_1 и ACD, PB_1C_1 и ABC; д) точки пересечения прямых MK и DC, B_1C_1 и BP, C_1M и DC.

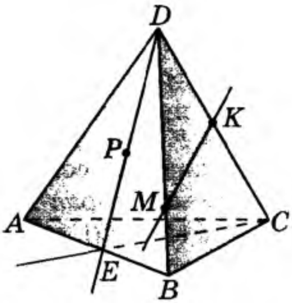


Рис. 8

3 Верно ли, что: а) любые три точки лежат в одной плоскости; б) любые четыре точки лежат в одной плоскости; в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости; г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна?

4 Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. а) Могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой? б) Могут ли прямые AB и CD пересекаться? Ответ обоснуйте.

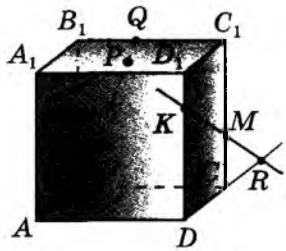


Рис. 9

5 Докажите, что через три данные точки, лежащие на прямой, проходит плоскость. Сколько существует таких плоскостей?

6 Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

7 Две прямые пересекаются в точке M. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку M и пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости. Лежат ли в одной плоскости все прямые, проходящие через точку M?

8 Верно ли утверждение: а) если две точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости; б) если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?

9 Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α. Лежат ли две другие вершины параллелограмма в плоскости α? Ответ обоснуйте.

10 Верно ли, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она: а) пересекает две стороны треугольника; б) проходит через одну из вершин треугольника?

11 Даны прямая и точка, не лежащая на этой прямой. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

12 Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Пересекаются ли плоскости, проходящие через точки A, B, C и A, B, D?

13 Могут ли две плоскости иметь: а) только одну общую точку; б) только две общие точки; в) только одну общую прямую?

14 Три прямые проходят через одну точку. Через каждые две из них проведена плоскость. Сколько всего проведено плоскостей?

15 Три прямые попарно пересекаются. Докажите, что они либо лежат в одной плоскости, либо имеют общую точку.

Глава I
Параллельность прямых и плоскостей

§ 1 Параллельность прямых, прямой и плоскости

4 Параллельные прямые в пространстве

Введем понятие параллельных прямых в пространстве.

Определение

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$. На рисунке 10 прямые a и b параллельны, а прямые a и c, a и d не параллельны.

Докажем теорему о параллельных прямых.

Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую a и точку M, не лежащую на этой прямой (рис. 11). Через прямую a и точку M проходит плоскость, и притом только одна (п. 3). Обозначим эту плоскость буквой α. Прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a, должна лежать в одной плоскости с точкой M и прямой a, т. е. должна лежать в плоскости α. Но в плоскости α, как известно из курса планиметрии, через точку M проходит прямая, параллельная прямой a, и притом только одна. На рисунке 11 эта прямая обозначена буквой b. Итак, b — единственная прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a. Теорема доказана.

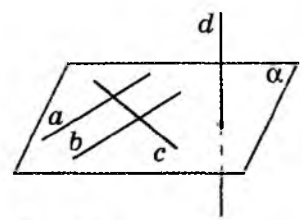


Рис. 10

В дальнейшем нам понадобятся также понятия параллельных отрезков, параллельных отрезка и прямой, параллельных лучей. Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой, а также параллельность двух лучей.

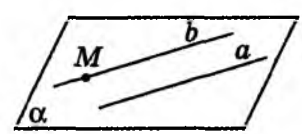


Рис. 11

На рисунке 12 отрезки CD и EF параллельны ($CD \parallel EF$), а отрезки AB и CD не параллельны, отрезок AB параллелен прямой a ($AB \parallel a$).

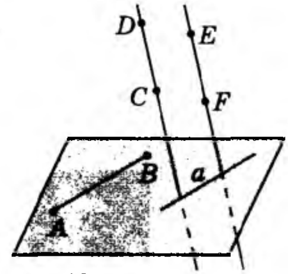


Рис. 12

5 Параллельность трех прямых

Докажем лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма

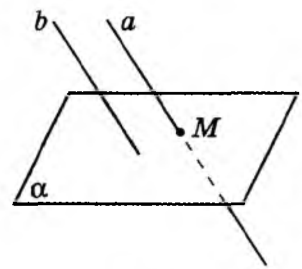
Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

▼ **Доказательство**

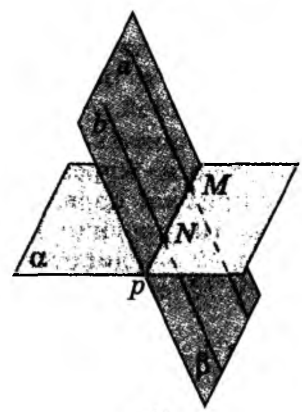
Рассмотрим параллельные прямые a и b, одна из которых — прямая a — пересекает плоскость α в точке M (рис. 13, *а*). Докажем, что прямая b также пересекает плоскость α, т. е. имеет с ней только одну общую точку.

Обозначим буквой β плоскость, в которой лежат параллельные прямые a и b. Так как две различные плоскости α и β имеют общую точку M, то по аксиоме A_3 они пересекаются по некоторой прямой p (рис. 13, *б*). Эта прямая лежит в плоскости β и пересекает прямую a (в точке M), поэтому она пересекает параллельную ей прямую b в некоторой точке N. Прямая p лежит также в плоскости α, поэтому N — точка плоскости α. Следовательно, N — общая точка прямой b и плоскости α.

Докажем теперь, что прямая b не имеет других общих точек с плоскостью α, кроме точки N. Это и будет означать, что прямая b пересекает плоскость α. Действительно, если бы прямая b имела еще одну общую точку с плоскостью α, то она целиком лежала бы в плоскости α и, значит, была бы общей прямой плоскостей α и β, т. е. совпадала бы с прямой p. Но это невозможно, так как по условию прямые a и b параллельны, а прямые a и p пересекаются. Лемма доказана. △



а)



б)

Рис. 13

Из курса планиметрии известно, что если три прямые лежат в одной плоскости и две из них параллельны третьей прямой, то эти две прямые параллельны. Аналогичное утверждение имеет место и для трех прямых в пространстве. Сформулируем и докажем это утверждение.

Теорема

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Доказательство

Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Докажем, что $a \parallel b$. Для этого нужно доказать, что прямые a и b: 1) лежат в одной плоскости и 2) не пересекаются.

1) Отметим какую-нибудь точку K на прямой b и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямую a и точку K (рис. 14). Докажем, что прямая b лежит в этой плоскости. Действительно, если допустить, что прямая b пересекает плоскость α, то по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая c также пересекает плоскость α. Но так как прямые a и c параллельны, то и прямая a пересекает плоскость α, что невозможно, ибо прямая a лежит в плоскости α.

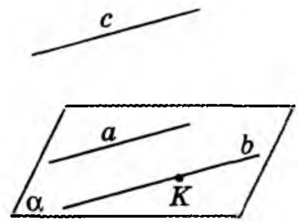


Рис. 14

2) Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые (a и b), параллельные прямой c, что невозможно. Теорема доказана.

6 Параллельность прямой и плоскости

Если две точки прямой лежат в данной плоскости, то согласно аксиоме A_2 вся прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что **возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:**

а) **прямая лежит в плоскости** (см. рис. 5, *а*);

б) **прямая и плоскость имеют только одну общую точку**, т. е. **пересекаются** (см. рис. 5, *б*);

в) **прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.**

Определение

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$. Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости, дают натянутые троллейбусные или трамвайные провода — они параллельны плоскости земли. Другой пример дает линия пересечения стены и потолка — эта линия параллельна плоскости пола (рис. 15, *а*). Заметим, что в плоскости пола имеется прямая, параллельная этой линии. Такой прямой является, например, линия пересечения пола с той же самой стеной.

На рисунке 15, *а* указанные прямые обозначены буквами *a* и *b*. Оказывается, что если в плоскости α имеется прямая *b*, параллельная прямой *a*, не лежащей в плоскости α, то прямая *a* и плоскость α параллельны (рис. 15, *б*).

Другими словами, наличие в плоскости α прямой *b*, параллельной прямой *a*, является **признаком**, по которому можно сделать вывод о параллельности прямой *a* и плоскости α. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

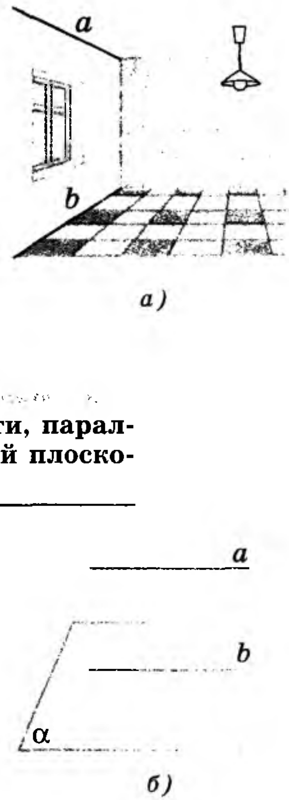


Рис. 15

Теорема

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Доказательство

Рассмотрим плоскость α и две параллельные прямые *a* и *b*, расположенные так, что прямая *b* лежит в плоскости α, а прямая *a* не лежит в этой плоскости (рис. 15, *б*). Докажем, что $a \parallel \alpha$.

Допустим, что это не так. Тогда прямая *a* пересекает плоскость α, а значит, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая *b* также пересекает плоскость α. Но это невозможно, так как прямая *b* лежит в плоскости α. Итак, прямая *a* не пересекает плоскость α, поэтому она параллельна этой плоскости. Теорема доказана.

Докажем еще два утверждения, которые часто используются при решении задач.

1^0. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Пусть через данную прямую *a*, параллельную плоскости α, проходит плоскость β, пересекающая плоскость α по прямой *b* (рис. 16). Докажем, что $b \parallel a$. Действительно, эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости β) и не пересекаются: ведь в противном случае прямая *a* пересекала бы плоскость α, что невозможно, поскольку по условию $a \parallel \alpha$.

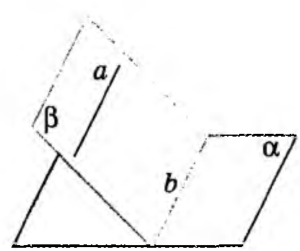


Рис. 16

2^0. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

В самом деле, пусть a и b — параллельные прямые, причем прямая a параллельна плоскости α. Тогда прямая a не пересекает плоскость α, и, следовательно, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также не пересекает плоскость α. Поэтому прямая b либо параллельна плоскости α, либо лежит в этой плоскости.

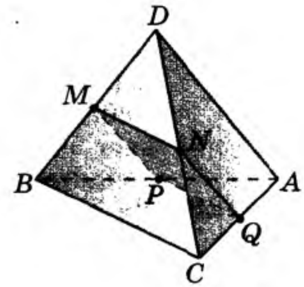


Рис. 17

Вопросы и задачи

16 Параллельные прямые a и b лежат в плоскости α. Докажите, что прямая c, пересекающая прямые a и b, также лежит в плоскости α.

17 На рисунке 17 точки M, N, Q и P — середины отрезков DB, DC, AC и AB. Найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $AD = 12$ см, $BC = 14$ см.

18 Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проведена плоскость, а через точки B и C — параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если: а) точка C — середина отрезка AB и $BB_1 = 7$ см; б) $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 20$ см.

19 Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α.

20 Средняя линия трапеции лежит в плоскости α. Пересекают ли прямые, содержащие ее основания, плоскость α? Ответ обоснуйте.

21 Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что любая прямая, параллельная отрезку CD, пересекает плоскости данных треугольников.

22 Точки A и B лежат в плоскости α, а точка C не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC, параллельна плоскости α.

23 Точка M не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости ABM.

24 Точка M не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BMC.

25 Докажите, что если данная прямая параллельна прямой, по которой пересекаются две плоскости, и не лежит в этих плоскостях, то она параллельна этим плоскостям.

26 Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости α, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

27 Точка C лежит на отрезке AB, причем $AB : BC = 4 : 3$. Отрезок CD, равный 12 см, параллелен плоскости α, проходящей через точку B. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E, и найдите отрезок BE.

28 На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что длина отрезка DE равна 5 см и $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$. Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

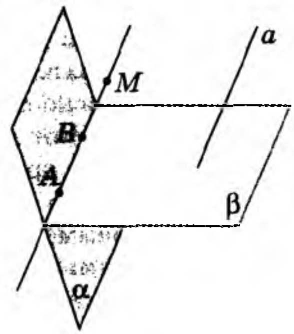


Рис. 18

29 В трапеции $ABCD$ основание BC равно 12 см. Точка M не лежит в плоскости трапеции, а точка K — середина отрезка BM. Докажите, что плоскость ADK пересекает отрезок MC в некоторой точке H, и найдите отрезок KH.

30 Основание AB трапеции $ABCD$ параллельно плоскости α, а вершина C лежит в этой плоскости. Докажите, что: а) основание CD трапеции лежит в плоскости α; б) средняя линия трапеции параллельна плоскости α.

31 Плоскость α параллельна стороне BC треугольника ABC и проходит через середину стороны AB. Докажите, что плоскость α проходит также через середину стороны AC.

32 Плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Прямая a параллельна как плоскости α, так и плоскости β. Докажите, что прямые a и AB параллельны.

Решение

Через точку A проведем* прямую AM, параллельную прямой a (рис. 18). Так как прямая a параллельна плоскостям α и β, то прямая AM лежит как в плоскости α, так и в плоскости β (п. 6, утверждение 2^0). Таким образом, AM — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β, т. е. она совпадает с прямой AB. Следовательно, $AB \parallel a$.

33 Докажите, что если три плоскости, не проходящие через одну прямую, попарно пересекаются, то прямые, по которым они пересекаются, либо параллельны, либо имеют общую точку.

---

* Выражения «проведем прямую», «проведем плоскость», разумеется, не нужно понимать в буквальном смысле (ни прямую, ни плоскость в пространстве мы не проводим). Эти слова означают, что указанная прямая или плоскость вводятся в рассмотрение.

§ 2 Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

7 Скрещивающиеся прямые

Если две прямые пересекаются или параллельны, то они лежат в одной плоскости. Однако в пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т. е. не существует такой плоскости, которая проходит через обе эти прямые. Ясно, что такие прямые не пересекаются и не параллельны.

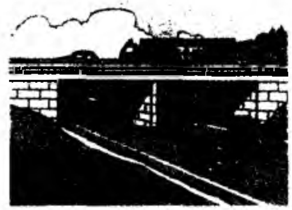


Рис. 19

Определение

Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (рис. 19).

Докажем теорему, которая выражает признак скрещивающихся прямых.

Теорема

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Доказательство

Рассмотрим прямую AB, лежащую в плоскости α, и прямую CD, пересекающую эту плоскость в точке C, не лежащей на прямой AB (рис. 20). Докажем, что AB и CD — скрещивающиеся прямые, т. е. они не лежат в одной плоскости. Действительно, если допустить, что прямые AB и CD лежат в некоторой плоскости β, то плоскость β будет проходить через прямую AB и точку C и поэтому совпадет с плоскостью α. Но это невозможно, так как прямая CD не лежит в плоскости α. Теорема доказана.

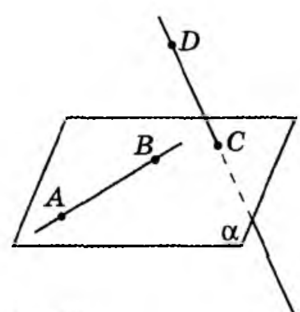
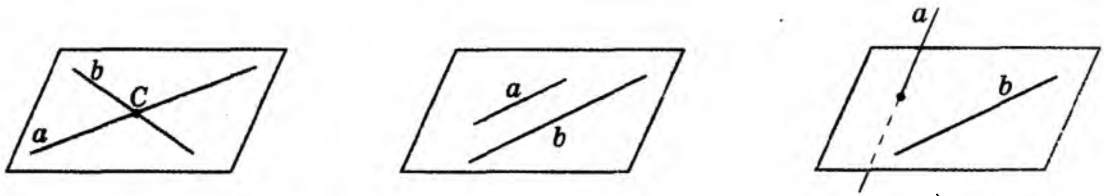


Рис. 20

Итак, **возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:**

а) **прямые пересекаются**, т. е. имеют только одну общую точку (рис. 21, *а*);



а) Пересекающиеся прямые

б) Параллельные прямые

в) Скрещивающиеся прямые

Рис. 21

б) **прямые параллельны,** т. е. лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 21, *б*);

в) **прямые скрещиваются,** т. е. не лежат в одной плоскости (рис. 21, *в*).

Докажем еще одну теорему о скрещивающихся прямых.

Теорема

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 22). Докажем, что через прямую AB проходит плоскость, параллельная прямой CD, и такая плоскость только одна.

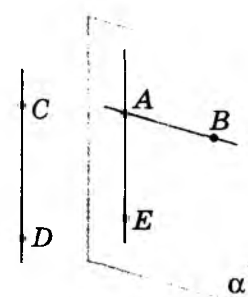


Рис. 22

Проведем через точку A прямую AE, параллельную прямой CD, и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямые AB и AE. Так как прямая CD не лежит в плоскости α и параллельна прямой AE, лежащей в этой плоскости, то прямая CD параллельна плоскости α.

Ясно, что плоскость α — единственная плоскость, проходящая через прямую AB и параллельная прямой CD. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекается с прямой AE, а значит, пересекается и с параллельной ей прямой CD. Теорема доказана.

Наглядной иллюстрацией этой теоремы служат две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (см. рис. 19). Нижняя дорога лежит в плоскости земли, параллельной дороге на эстакаде. Ясно, что и через дорогу на эстакаде проходит плоскость, параллельная плоскости земли, а значит, параллельная нижней дороге.

8 Углы с сонаправленными сторонами

Согласно одной из аксиом (см. приложение 2) любая прямая a, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части, называемые **полуплоскостями** (рис. 23). Прямая a называется **границей** каждой из этих полуплоскостей. Любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей — по разные стороны от этой прямой (см. рис. 23).

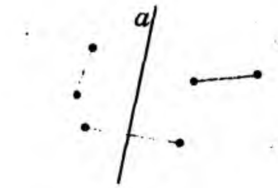


Рис. 23

Два луча OA и O_1A_1, не лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей OO_1. Лучи OA и O_1A_1, лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они совпадают или один из них содержит другой. На рисунке 24 лучи OA и O_1A_1, а также лучи A_2B_2 и O_2B_2 сонаправлены, а лучи OA и O_2A_2, OA и O_3A_3, O_2A_2 и O_2B_2 не являются сонаправленными (объясните почему). Докажем теорему об углах с сонаправленными сторонами.

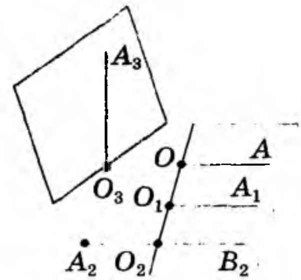


Рис. 24

Теорема

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

Доказательство

Ограничимся рассмотрением случая, когда углы O и O_1 с соответственно сонаправленными сторонами лежат в разных плоскостях, и докажем, что $\angle O = \angle O_1$.

Отметим на сторонах угла O какие-нибудь точки A и B и отложим на соответственных сторонах угла O_1 отрезки $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$ (рис. 25). Так как лучи OA и O_1A_1 сонаправлены и $OA = O_1A_1$, то получится параллелограмм OAA_1O_1 и, следовательно, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$. Аналогично получаем: $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$. Отсюда следует, что $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 = BB_1$, а, значит, ABB_1A_1 — параллелограмм и $AB = A_1B_1$.

Сравним теперь треугольники AOB и $A_1O_1B_1$. Они равны по трем сторонам, и поэтому $\angle O = \angle O_1$. Теорема доказана.

▼ **Замечание**

При доказательстве мы неявно воспользовались тем, что отрезки AB и A_1B_1 не пересекаются (в противном случае параллелограммом оказалась бы фигура AB_1BA_1, а не ABB_1A_1). Докажем это. Допустим, что отрезки AB и A_1B_1 пересекаются. Тогда плоскости AOB и $A_1O_1B_1$ пересекаются по некоторой прямой a. Поскольку $OA \parallel O_1A_1$, то $OA \parallel A_1O_1B_1$, поэтому $a \parallel OA$ (см. п. 6).

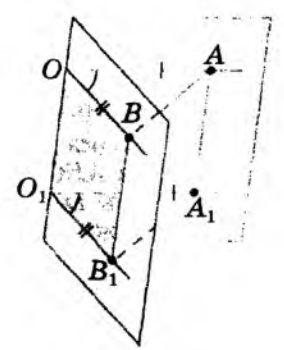


Рис. 25

Аналогично $a \parallel OB$. Но этого не может быть, так как через точку O проходит одна прямая, параллельная прямой a. Следовательно, отрезки AB и A_1B_1 не пересекаются. △

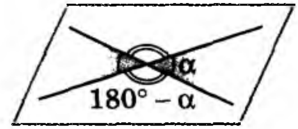


Рис. 26

9 Угол между прямыми

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и другие три угла (рис. 26). Пусть α — тот из углов, который не превосходит любого из трех остальных углов. Тогда говорят, что **угол между пересекающимися прямыми равен α**. Очевидно, $0° < \alpha \leqslant 90°$.

Введем теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Пусть AB и CD — две скрещивающиеся прямые (рис. 27, *а*). Через произвольную точку M_1 проведем прямые A_1B_1 и C_1D_1, соответственно параллельные прямым AB и CD (рис. 27, *б*).

Если угол между прямыми A_1B_1 и C_1D_1 равен φ, то будем говорить, что **угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен φ.**

Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M_1. Действительно, возьмем любую другую точку M_2 и проведем через нее прямые A_2B_2 и C_2D_2, соответственно параллельные прямым AB и CD (см. рис. 27, *б*). Так как $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ (объясните почему), то стороны углов с вершинами M_1 и M_2 попарно сонаправлены (на рис. 27, *б* такими углами являются $\angle A_1M_1C_1$ и $\angle A_2M_2C_2$, $\angle A_1M_1D_1$ и $\angle A_2M_2D_2$ и т. д.). Поэтому эти углы соответственно равны. Отсюда следует, что угол между прямыми A_2B_2 и C_2D_2 также равен φ.

В качестве точки M_1 можно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых. На рисунке 27, *в* на прямой CD отмечена точка M и через нее проведена прямая $A'B'$, параллельная AB. Угол между прямыми $A'B'$ и CD также равен φ.

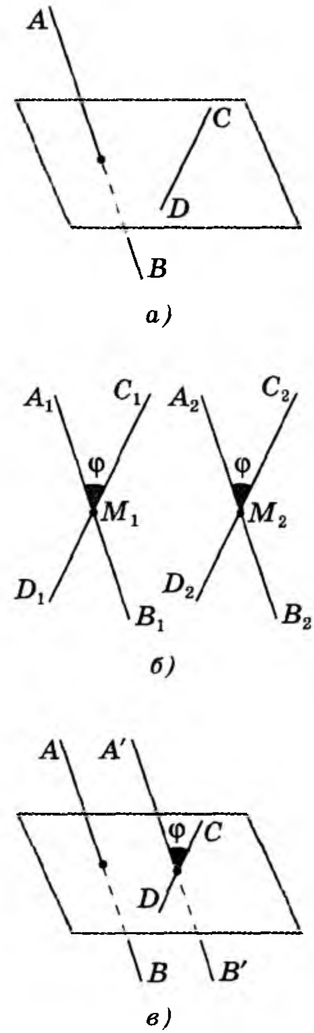


Рис. 27

Вопросы и задачи

34 Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M, N и P — середины отрезков DA, DB и DC соответственно, точка K лежит на отрезке BN. Выясните взаимное расположение прямых: а) ND и AB; б) PK и BC; в) MN и AB; г) MP и AC; д) KN и AC; е) MD и BC.

35 Через точку M, не лежащую на прямой a, проведены две прямые, не имеющие общих точек с прямой a. Докажите, что по крайней мере одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися прямыми.

36 Прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b, параллельную прямой a. Докажите, что b и c — скрещивающиеся прямые.

37 Прямая m пересекает сторону AB треугольника ABC. Каково взаимное расположение прямых m и BC, если: а) прямая m лежит в плоскости ABC и не имеет общих точек с отрезком AC; б) прямая m не лежит в плоскости ABC?

38 Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a, параллельная диагонали BD, а через вершину C — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что: а) прямые a и CD пересекаются; б) a и b — скрещивающиеся прямые.

39 Докажите, что если AB и CD скрещивающиеся прямые, то AD и BC также скрещивающиеся прямые.

40 На скрещивающихся прямых a и b отмечены соответственно точки M и N. Через прямую a и точку N проведена плоскость α, а через прямую b и точку M — плоскость β. а) Лежит ли прямая b в плоскости α? б) Пересекаются ли плоскости α и β? При положительном ответе укажите прямую, по которой они пересекаются.

41 Может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельна третьей прямой? Ответ обоснуйте.

42 Даны параллелограмм $ABCD$ и трапеция $ABEK$ с основанием EK, не лежащие в одной плоскости. а) Выясните взаимное расположение прямых CD и EK. б) Найдите периметр трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность и $AB = 22{,}5$ см, $EK = 27{,}5$ см.

43 Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника* являются вершинами параллелограмма.

44 Прямые OB и CD параллельные, а OA и CD — скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми OA и CD, если: а) $\angle AOB = 40°$; б) $\angle AOB = 135°$; в) $\angle AOB = 90°$.

45 Прямая a параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в плоскости параллелограмма. Докажите, что a и CD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, если один из углов параллелограмма равен: а) $50°$; б) $121°$.

46 Прямая m параллельна диагонали BD ромба $ABCD$ и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что: а) m и AC — скрещивающиеся прямые — и найдите угол между ними; б) m и AD — скрещивающиеся прямые — и найдите угол между ними, если угол ABC равен $128°$.

47 В пространственном четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

---

* Четырехугольник называется **пространственным**, если его вершины не лежат в одной плоскости.

§3 Параллельность плоскостей

10 Параллельные плоскости

Мы знаем, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (аксиома A_3). Отсюда следует, что **две плоскости либо пересекаются по прямой** (рис. 28, *а*), **либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки** (рис. 28, *б*).

Определение

Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Представление о параллельных плоскостях дают пол и потолок комнаты, две противоположные стены, поверхность стола и плоскость пола.

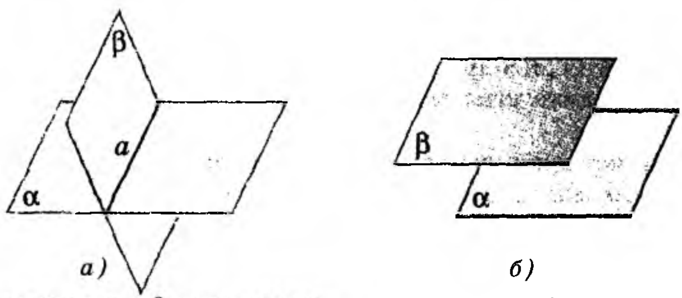
Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Рассмотрим признак параллельности двух плоскостей.

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство

Рассмотрим две плоскости α и β (рис. 29). В плоскости α лежат пересекающиеся в точке M прямые a и b, а в плоскости β — прямые a_1 и b_1, причем $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Прежде всего отметим, что по признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$.



Плоскости α и β пересекаются Плоскости α и β параллельны

Рис. 28

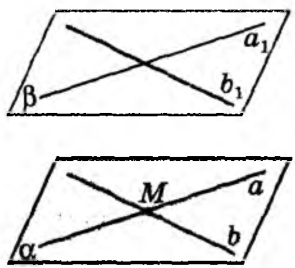


Рис. 29

Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Мы получили, что плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой c. Отсюда следует (по свойству 1^0, п. 6), что прямые a и c параллельны.

Но плоскость α проходит также через прямую b, параллельную плоскости β. Поэтому $b \parallel c$. Таким образом, через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как по теореме о параллельных прямых через точку M проходит только одна прямая, параллельная прямой c. Значит, наше допущение неверно и, следовательно, $\alpha \parallel \beta$. Теорема доказана.

11 Свойства параллельных плоскостей

Рассмотрим два свойства параллельных плоскостей.

1^0. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Наглядным подтверждением этого факта служат линии пересечения пола и потолка со стеной комнаты — эти линии параллельны.

Для доказательства данного свойства рассмотрим прямые a и b, по которым параллельные плоскости α и β пересекаются с плоскостью γ (рис. 30). Докажем, что прямые a и b параллельны. Эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости γ) и не пересекаются. В самом деле, если бы прямые a и b пересекались, то плоскости α и β имели бы общую точку, что невозможно, так как эти плоскости параллельны.

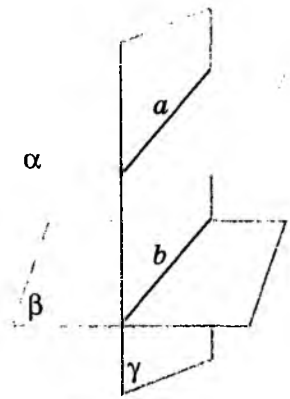


Рис. 30

Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. прямые a и b параллельны.

2^0. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Для доказательства этого свойства рассмотрим отрезки AB и CD двух параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями α и β (рис. 31). Докажем, что $AB = CD$. Плоскость γ, проходящая через параллельные прямые AB и CD, пересекается с плоскостями α и β по параллельным прямым AC и BD (свойство 1^0). Таким образом, в четырехугольнике $ABDC$ противоположные стороны попарно параллельны, т. е. $ABDC$ — параллелограмм. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому отрезки AB и CD равны.

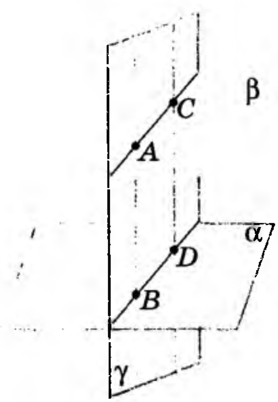


Рис. 31

Вопросы и задачи

48 Укажите модели параллельных плоскостей на предметах классной обстановки.

49 Прямая m пересекает плоскость α в точке B. Существует ли плоскость, проходящая через прямую m и параллельная плоскости α?

50 Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Докажите, что прямая m параллельна плоскости β.

51 Докажите, что плоскости α и β параллельны, если две пересекающиеся прямые m и n плоскости α параллельны плоскости β.

52 Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α.

53 Три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны.

54 Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, N и P — середины отрезков BA, BC и BD соответственно.
а) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ADC равна 48 см^2.

55 Докажите, что если прямая a пересекает плоскость α, то она пересекает также любую плоскость, параллельную данной плоскости α.

Решение

Рассмотрим произвольную плоскость β, параллельную плоскости α. Через какую-нибудь точку B плоскости β проведем прямую b, параллельную прямой a.

Так как прямая a пересекает плоскость α, то прямая b также пересекает эту плоскость. Следовательно, прямая b пересекает плоскость β (а не лежит в ней). Поэтому прямая a также пересекает плоскость β.

56 Плоскости α и β параллельны, A — точка плоскости α. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A и параллельная плоскости β, лежит в плоскости α.

57 Прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей. Докажите, что прямая a либо параллельна другой плоскости, либо лежит в ней.

58 Докажите, что если плоскость γ пересекает одну из параллельных плоскостей α и β, то она пересекает и другую плоскость.

Решение

Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a. Докажем, что плоскость γ пересекает также плоскость β. Проведем в плоскости γ прямую b, пересекающую прямую a. Прямая b пересекает плоскость α, поэтому она пересекает и параллельную ей плоскость β (задача 55). Следовательно, и плоскость γ, в которой лежит прямая b, пересекает плоскость β.

59 Докажите, что через точку A, не лежащую в плоскости α, проходит плоскость, параллельная плоскости α, и притом только одна.

Решение

Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые a и b, а через точку A проведем прямые a_1 и b_1, соответственно параллельные прямым a и b. Рассмотрим плоскость β, проходящую через прямые a_1 и b_1. Плоскость β — искомая, так как она проходит через точку A и по признаку параллельности двух плоскостей параллельна плоскости α.

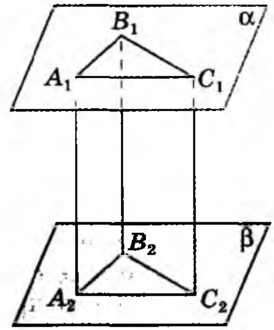


Рис. 32

Докажем теперь, что β — единственная плоскость, проходящая через данную точку A и параллельная плоскости α. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через точку A, пересекает плоскость β, поэтому пересекает и параллельную ей плоскость α (задача 58).

60 Две плоскости α и β параллельны плоскости γ. Докажите, что плоскости α и β параллельны.

61 Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая в плоскости этих прямых. Докажите, что через точку A проходит плоскость, параллельная прямым a и b, и притом только одна.

62 Для проверки горизонтальности установки диска угломерных инструментов пользуются двумя уровнями, расположенными в плоскости диска на пересекающихся прямых. Почему уровни нельзя располагать на параллельных прямых?

63 Параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла BAC соответственно в точках A_1 и A_2, а сторону AC этого угла — соответственно в точках B_1 и B_2. Найдите: а) AA_2 и AB_2, если $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см; б) A_2B_2 и AA_2, если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 \quad \frac{3}{2}A_1A_2$.

64 Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскостей в точках A_1, B_1 и C_1, а другую — в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

65 Параллельные отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 заключены между параллельными плоскостями α и β (рис. 32).

а) Определите вид четырехугольников $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$ и $A_1C_1C_2A_2$.

б) Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

§4 Тетраэдр и параллелепипед

12 Тетраэдр

Одна из глав нашего курса будет посвящена многогранникам — поверхностям геометрических тел, составленным из многоугольников. Но еще до подробного изучения многогранников мы познакомимся с двумя из них — **тетраэдром** и **параллелепипедом**. Это даст нам возможность проиллюстрировать понятия, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей, на примере двух важных геометрических тел.

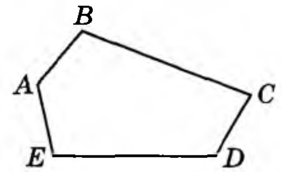
Прежде чем ввести понятия тетраэдра и параллелепипеда, вспомним, что мы понимали под многоугольником в планиметрии. Многоугольник мы рассматривали либо как замкнутую линию без самопересечений, составленную из отрезков (рис. 33, *а*), либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая ее саму (рис. 33, *б*). При рассмотрении поверхностей и тел в пространстве будем пользоваться вторым толкованием многоугольника. При таком толковании любой многоугольник в пространстве представляет собой плоскую поверхность.

Перейдем теперь к определению тетраэдра.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольники DAB, DBC и DCA. Поверхность, составленная из четырех треугольников ABC, DAB, DBC и DCA, называется **тетраэдром** и обозначается так: $DABC$ (рис. 34).

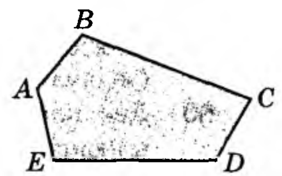
Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами тетраэдра**. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются **противоположными**. На рисунке 34 противоположными являются ребра AD и BC, BD и AC, CD и AB. Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют ее **основанием**, а три другие — **боковыми гранями**.

Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунках 34 и 35, т. е. в виде выпуклого или невыпуклого четырехугольника с диагоналями. При



а)

Многоугольник $ABCDE$ — фигура, составленная из отрезков



б)

Многоугольник $ABCDE$ — часть плоскости, ограниченная линией $ABCDE$

Рис. 33

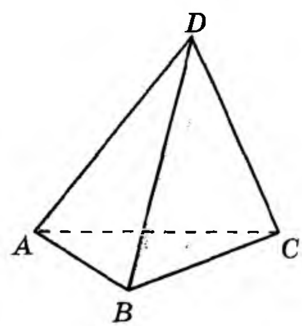


Рис. 34

этом штриховыми линиями изображаются невидимые ребра. На рисунке 34 невидимым является только ребро AC, а на рисунке 35 — ребра EK, KF и KL.

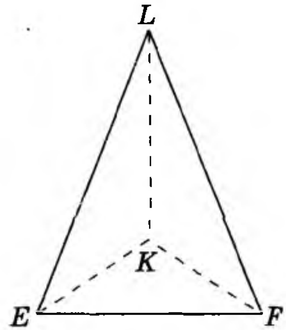


Рис. 35

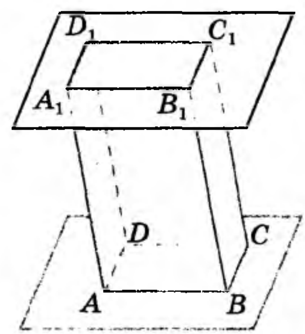
13 Параллелепипед

Рассмотрим два равных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны (рис. 36, *а*). Четырехугольники

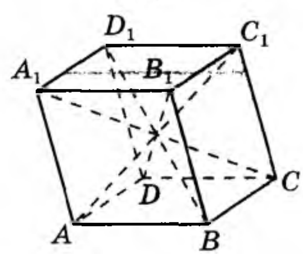
$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1 \qquad (1)$$

также являются параллелограммами, так как каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны, например, в четырехугольнике ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 параллельны по условию, а стороны AB и A_1B_1 — по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей (свойство 1^0, п. 11). Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и четырех параллелограммов (1), называется **параллелепипедом** и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины параллелограммов — **вершинами параллелепипеда**. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются **смежными**, а не имеющие общих ребер — **противоположными**. На рисунке 36, *б* противоположными являются грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, ADD_1A_1 и BCC_1B_1. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются **противоположными**. Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется **диагональю параллелепипеда**. Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке 36, *б* диагоналями являются отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1.



а)



б)

Параллелепипед

Рис. 36

Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их **основаниями**, а остальные грани — **боковыми гранями параллелепипеда**. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми ребрами**. Так, если в качестве оснований выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми гранями будут параллелограммы (1), а боковыми ребрами — отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Параллелепипед изображается обычно так, как показано на рисунке 36, *б*. При этом изображениями граней являются параллелограммы; невидимые ребра и другие невидимые отрезки, например диагонали, изображаются штриховыми линиями*.

Рассмотрим два свойства параллелепипеда.

1^0. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.**

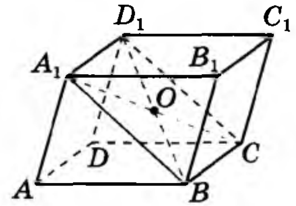
Докажем, например, параллельность и равенство граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37, *а*). Так как $ABCD$ и ADD_1A_1 — параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA_1 одной грани соответственно параллельны двум пересекающимся прямым CD и DD_1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны.

Докажем теперь равенство этих граней. Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то $AB = DC$ и $AA_1 = DD_1$. По этой же причине стороны углов A_1AB и D_1DC соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB_1A_1 соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма DCC_1D_1, поэтому эти параллелограммы равны.

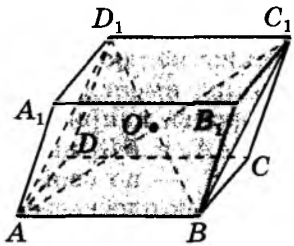
2^0. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Чтобы доказать это свойство, рассмотрим четырехугольник A_1D_1CB, диагонали которого A_1C и D_1B являются диагоналями параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 37, *а*). Так как $A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1 = BC$ (объясните почему), то A_1D_1CB — параллелограмм. Поэтому диагонали A_1C и D_1B пересекаются в некоторой точке O и этой точкой делятся пополам.

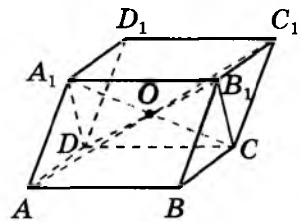
Далее рассмотрим четырехугольник AD_1C_1B (рис. 37, *б*). Он также является параллелограммом (докажите это), и, следовательно, его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O. Таким



а)



б)



в)

Рис. 37

* Более подробно об изображении пространственных фигур на плоскости, в частности параллелепипеда, рассказано в приложении 1.

** Две грани параллелепипеда называются **параллельными**, если их плоскости параллельны.

образом, диагонали A_1C, D_1B и AC_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

Наконец, рассматривая четырехугольник A_1B_1CD (рис. 37, *в*), точно так же устанавливаем, что и четвертая диагональ DB_1 параллелепипеда проходит через точку O и делится ею пополам.

14 Задачи на построение сечений

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их **сечения** различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем **секущей плоскостью** тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением тетраэдра (параллелепипеда)**. Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 38). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники (рис. 39, *а*), пятиугольники (рис. 39, *б*) и шестиугольники (рис. 39, *в*).

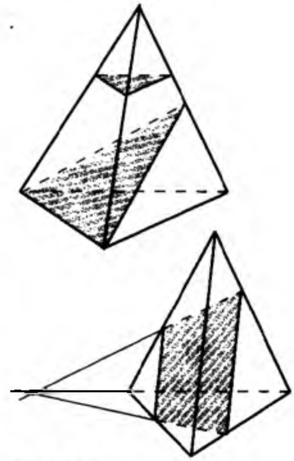


Рис. 38

При построении сечений параллелепипеда на рисунке следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны (свойство 1^0, п. 11). Так, на рисунке 39, *б* секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам AB и CD, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) — по отрезкам AE и BC, поэтому $AB \parallel CD$ и $AE \parallel BC$. По той же причине на рисунке 39, *в* $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$, $BC \parallel EF$. Отметим также, что для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

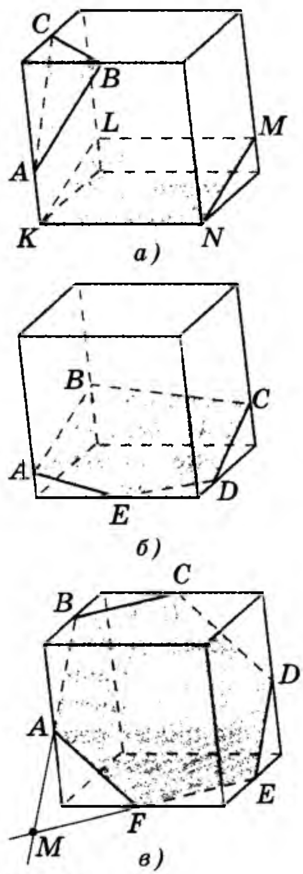


Рис. 39

Рассмотрим примеры построения различных сечений тетраэдра и параллелепипеда.

Задача 1

На ребрах AB, BD и CD тетраэдра $ABCD$ отмечены точки M, N и P (рис. 40, *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

Решение

Построим сначала прямую, по которой плоскость MNP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения еще одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E (рис. 40, *б*), которая и будет второй общей точкой плоскостей MNP и ABC. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырехугольник $MNPQ$ — искомое сечение.

Если прямые NP и BC параллельны (рис. 40, *в*), то прямая NP параллельна грани ABC, поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ME', параллельной прямой NP. Точка Q, как и в первом случае, есть точка пересечения ребра AC с прямой ME'.

Задача 2

Точка M лежит на боковой грани ADB тетраэдра $DABC$ (рис. 41, *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно основанию ABC.

Решение

Так как секущая плоскость параллельна плоскости ABC, то она параллельна прямым AB, BC и CA. Следовательно, секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам треугольника ABC (п. 6, утверждение 1^0). Отсюда вытекает следующий способ построения искомого сечения. Проведем через точку M прямую, параллельную отрезку AB, и обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с боковыми ребрами DA и DB (рис. 41, *б*). Затем через точку P проведем прямую, параллельную отрезку AC, и обозначим буквой R точку пересечения этой прямой с ребром DC. Треугольник PQR — искомое сечение.

Задача 3

На ребрах параллелепипеда даны три точки A, B и C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

Решение

Построение искомого сечения зависит от того, на каких ребрах параллелепипеда лежат точки A, B и C. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если точки A, B и C лежат на ребрах, выходящих из одной вершины (см. рис. 39, *а*), нужно провести отрезки AB, BC и CA, и получится искомое сечение — треугольник ABC. Если точки A, B и C расположены так, как

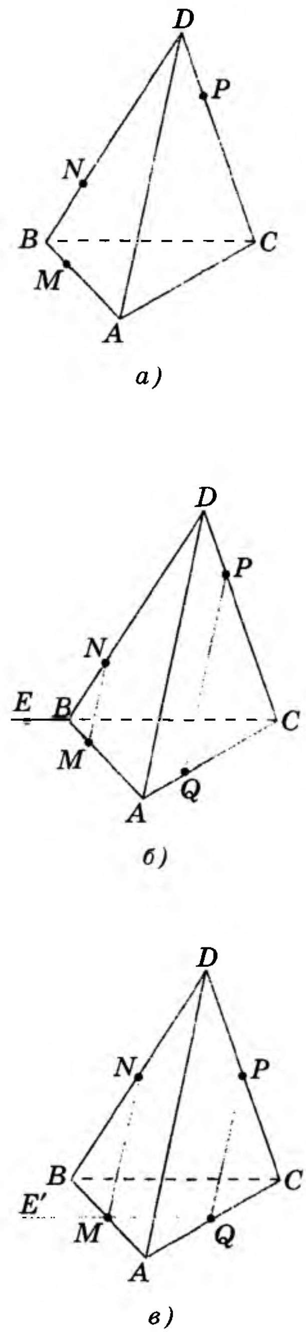


Рис. 40

показано на рисунке 39, *б*, то сначала нужно провести отрезки AB и BC, а затем через точку A провести прямую, параллельную BC, а через точку C — прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с ребрами нижней грани дают точки E и D. Остается провести отрезок ED, и искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$ — построено.

Более трудный случай, когда данные точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, *в*. В этом случае можно поступить так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Для этого проведем прямую AB и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и прямая AB, до пересечения с этой прямой в точке M. Далее через точку M проведем прямую, параллельную прямой BC. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с ребрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведем прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проводим отрезки AF и CD, и искомое сечение — шестиугольник $ABCDEF$ — построено.

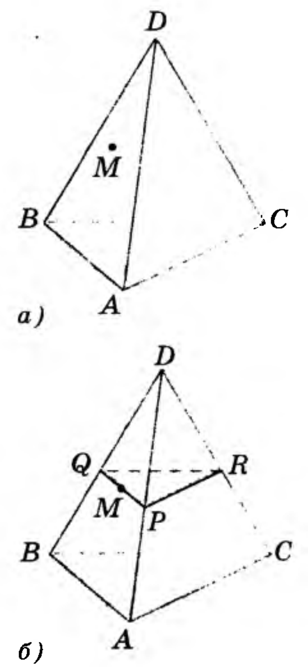


Рис. 41

Задачи

66 Назовите все пары скрещивающихся (т. е. принадлежащих скрещивающимся прямым) ребер тетраэдра $ABCD$. Сколько таких пар ребер имеет тетраэдр?

67 В тетраэдре $DABC$ дано: $\angle ADB = 54°$, $\angle BDC = 72°$, $\angle CDA = 90°$, $DA = 20$ см, $BD = 18$ см, $DC = 21$ см. Найдите: а) ребра основания ABC данного тетраэдра; б) площади всех боковых граней.

68 Точки M и N — середины ребер AB и AC тетраэдра $ABCD$. Докажите, что прямая MN параллельна плоскости BCD.

69 Через середины ребер AB и BC тетраэдра $SABC$ проведена плоскость параллельно ребру SB. Докажите, что эта плоскость пересекает грани SAB и SBC по параллельным прямым.

70 Докажите, что плоскость, проходящая через середины ребер AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$, параллельна плоскости BCD.

71 Изобразите тетраэдр $DABC$ и на ребрах DB, DC и BC отметьте соответственно точки M, N и K. Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC; б) прямой KN и плоскости ABD.

72 Изобразите тетраэдр $DABC$ и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости грани ABC, если: а) точка M является серединой ребра AD; б) точка M лежит внутри грани ABD.

73 В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и P являются серединами ребер AB, BC и CD, $AC = 10$ см, $BD = 12$ см. Докажите, что плоскость MNP

проходит через середину K ребра AD, и найдите периметр четырехугольника, полученного при пересечении тетраэдра с плоскостью MNP.

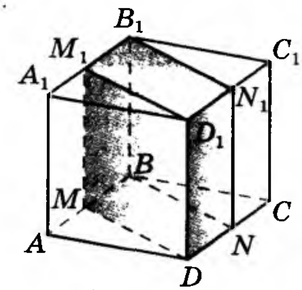


Рис. 42

74 Через точку пересечения медиан грани BCD тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, параллельная грани ABC. а) Докажите, что сечение тетраэдра этой плоскостью есть треугольник, подобный треугольнику ABC. б) Найдите отношение площадей сечения и треугольника ABC.

75 Изобразите тетраэдр $KLMN$. а) Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN. б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины E, O и F отрезков LM, MA и MK, параллельна плоскости LKA. Найдите площадь треугольника EOF, если площадь треугольника LKA равна 24 см^2.

76 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $AC \parallel A_1C_1$ и $BD \parallel B_1D_1$.

77 Сумма всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 120 см. Найдите каждое ребро параллелепипеда, если $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$, $\frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$.

78 На рисунке 42 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на ребрах которого отмечены точки M, N, M_1 и N_1 так, что $AM = CN = A_1M_1 = C_1N_1$. Докажите, что $MBNDM_1B_1N_1D_1$ — параллелепипед.

79 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение: а) плоскостью ABC_1; б) плоскостью ACC_1. Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

80 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также отрезок, по которому эти сечения пересекаются.

81 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M и N соответственно на ребрах BB_1 и CC_1. Постройте точку пересечения: а) прямой MN с плоскостью ABC; б) прямой AM с плоскостью $A_1B_1C_1$.

82 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте внутреннюю точку M грани AA_1B_1B. Постройте сечение параллелепипеда, проходящее через точку M параллельно: а) плоскости основания $ABCD$; б) грани BB_1C_1C; в) плоскости BDD_1.

83 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D; б) точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости AB_1C_1.

84 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Докажите, что построенное сечение — трапеция.

85 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью BKL, где точка K — середина ребра AA_1, а точка L — середина ребра CC_1. Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

86 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через диагональ AC основания параллельно диагонали BD_1. Докажите, что если основание параллелепипеда — ромб и углы ABB_1 и CBB_1 прямые, то построенное сечение — равнобедренный треугольник.

87 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах: а) BB_1, AA_1, AD; б) CC_1, AD, BB_1.

Вопросы к главе I

1 Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?

2 Точка M не лежит на прямой a. Сколько прямых, не пересекающих прямую a, проходит через точку M? Сколько из этих прямых параллельны прямой a?

3 Прямые a и c параллельны, а прямые a и b пересекаются. Могут ли прямые b и c быть параллельными?

4 Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли, что эта прямая:
а) не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости α;
б) параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;
в) параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости α?

5 Прямая a параллельна плоскости α. Сколько прямых, лежащих в плоскости α, параллельны прямой a? Параллельны ли друг другу эти прямые, лежащие в плоскости α?

6 Прямая a пересекает плоскость α. Лежит ли в плоскости α хоть одна прямая, параллельная a?

7 Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости. Верно ли утверждение, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

8 Верно ли утверждение: если две прямые параллельны некоторой плоскости, то они параллельны друг другу?

9 Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые: а) пересекаться; б) быть скрещивающимися?

10 Могут ли скрещивающиеся прямые a и b быть параллельными прямой c?

11 Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость α и плоскость трапеции?

12 Две стороны параллелограмма параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость α и плоскость параллелограмма?

13 Могут ли быть равны два непараллельных отрезка, заключенные между параллельными плоскостями?

14 Существует ли тетраэдр, у которого пять углов граней прямые?

15 Существует ли параллелепипед, у которого: а) только одна грань — прямоугольник; б) только две смежные грани — ромбы; в) все углы граней острые; г) все углы граней прямые; д) число всех острых углов граней не равно числу всех тупых углов граней?

16 Какие многоугольники могут получиться в сечении: а) тетраэдра; б) параллелепипеда?

Дополнительные задачи

88 Параллельные прямые AC и BD пересекают плоскость α в точках A и B. Точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $AB = 4$ см. а) Докажите, что прямая CD пересекает плоскость α в некоторой точке E. б) Найдите отрезок BE.

89 Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Медианы треугольников ABC и CBD пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2. Докажите, что отрезки AD и M_1M_2 параллельны.

90 Вершины A и B трапеции $ABCD$ лежат в плоскости α, а вершины C и D не лежат в этой плоскости. Как расположена прямая CD относительно плоскости α, если отрезок AB является: а) основанием трапеции; б) боковой стороной трапеции?

91 Через каждую из двух параллельных прямых a и b и точку M, не лежащую в плоскости этих прямых, проведена плоскость. Докажите, что эти плоскости пересекаются по прямой, параллельной прямым a и b.

92 Плоскость α и прямая a параллельны прямой b. Докажите, что прямая a либо параллельна плоскости α, либо лежит в ней.

93 Прямые a и b параллельны. Через точку M прямой a проведена прямая MN, отличная от прямой a и не пересекающая прямую b. Каково взаимное расположение прямых MN и b?

94 Даны две скрещивающиеся прямые и точка B, не лежащая на этих прямых. Пересекаются ли плоскости, каждая из которых проходит через одну из прямых и точку B? Ответ обоснуйте.

95 Прямая a параллельна плоскости α. Докажите, что если плоскость β пересекает прямую a, то она пересекает и плоскость α.

96 Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между плоскостью и параллельной ей прямой, равны.

97 Докажите, что два угла с соответственно параллельными сторонами либо равны, либо их сумма равна $180°$.

98 Прямая a параллельна плоскости α. Существует ли плоскость, проходящая через прямую a и параллельная плоскости α? Если существует, то сколько таких плоскостей? Ответ обоснуйте.

99 Докажите, что три параллельные плоскости отсекают на любых двух пересекающих эти плоскости прямых пропорциональные отрезки.

100 Даны две скрещивающиеся прямые и точка A. Докажите, что через точку A проходит, и притом только одна, плоскость, которая либо параллельна данным прямым, либо проходит через одну из них и параллельна другой.

101 Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

102 Докажите, что плоскость α, проходящая через середины двух ребер основания тетраэдра и вершину, не принадлежащую основанию, параллельна третьему ребру основания. Найдите периметр и площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если длины всех ребер тетраэдра равны 20 см.

103 На ребрах DA, DB и DC тетраэдра $DABC$ отмечены точки M, N и P так, что $DM : MA = DN : NB = DP : PC$. Докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ABC равна $10\ см^2$ и $DM : MA = 2 : 1$.

104 Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AC и BD.

105 Изобразите тетраэдр $DABC$ и отметьте точки M и N на ребрах BD и CD и внутреннюю точку K грани ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

106 Изобразите тетраэдр $DABC$, отметьте точку K на ребре DC и точки M и N граней ABC и ACD. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

107 Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно грани BDC.

108 В тетраэдре $DABC$ биссектрисы трех углов при вершине D пересекают отрезки BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

109 Две плоскости, каждая из которых содержит два боковых ребра параллелепипеда, не принадлежащих одной грани, пересекаются по прямой a. Докажите, что прямая a параллельна боковым ребрам параллелепипеда и пересекает все его диагонали.

110 Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость A_1DB параллельна плоскости D_1CB_1.

111 Докажите, что диагональ параллелепипеда меньше суммы трех ребер, имеющих общую вершину.

112 Докажите, что сумма квадратов четырех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов двенадцати его ребер.

113 По какой прямой пересекаются плоскости сечений A_1BCD_1 и BDD_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

114 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте на ребре AB точку M. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости ACC_1.

115 Точка M лежит на ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости BDC_1.

Глава II
Перпендикулярность прямых и плоскостей

§ 1 Перпендикулярность прямой и плоскости

15 Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: $a \perp b$. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися. На рисунке 43 перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые a и c скрещивающиеся. Докажем лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой.

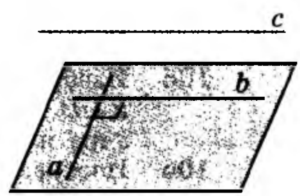


Рис. 43

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

▼ **Доказательство**

Пусть $a \parallel b$ и $a \perp c$. Докажем, что $b \perp c$. Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c (рис. 44). Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90°$.

По условию $b \parallel a$, а по построению $a \parallel MA$, поэтому $b \parallel MA$. Итак, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между которыми равен 90°. Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90°, т. е. $b \perp c$. Лемма доказана. △

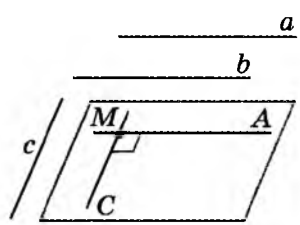


Рис. 44

16 Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Определение

Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что **плоскость α перпендикулярна к прямой a.**

Если прямая a перпендикулярна к плоскости α, то она пересекает эту плоскость. В самом деле, если бы прямая a не пересекала плоскость α, то она или лежала бы в этой плоскости, или была бы параллельна ей. Но тогда в плоскости α имелись бы прямые, не перпендикулярные к прямой a, например прямые, параллельные ей, что противоречит определению перпендикулярности прямой и плоскости. Значит, прямая a пересекает плоскость α.

На рисунке 45 изображена прямая a, перпендикулярная к плоскости α.

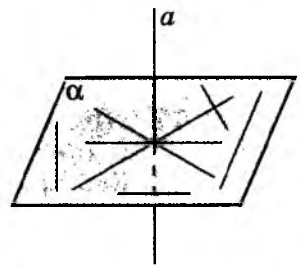


Рис. 45

Окружающая нас обстановка дает много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Непокосившийся телеграфный столб стоит прямо, т. е. перпендикулярно к плоскости земли. Так же расположены колонны здания по отношению к плоскости фундамента, линии пересечения стен по отношению к плоскости пола и т. д.

Докажем две теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

Теорема

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство

Рассмотрим две параллельные прямые a и a_1 и плоскость α, такую, что $a \perp \alpha$. Докажем, что и $a_1 \perp \alpha$.

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α (рис. 46). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. $a_1 \perp \alpha$. Теорема доказана.

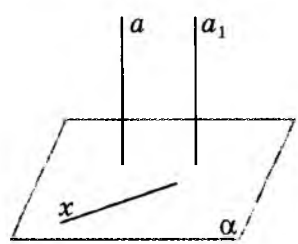


Рис. 46

Докажем обратную теорему.

Теорема

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

▼ **Доказательство**

Рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α (рис. 47, *а*). Докажем, что $a \parallel b$.

Через какую-нибудь точку M прямой b проведем прямую b_1, параллельную прямой a. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Тем самым будет доказано, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1, через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 47, *б*). Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана. △

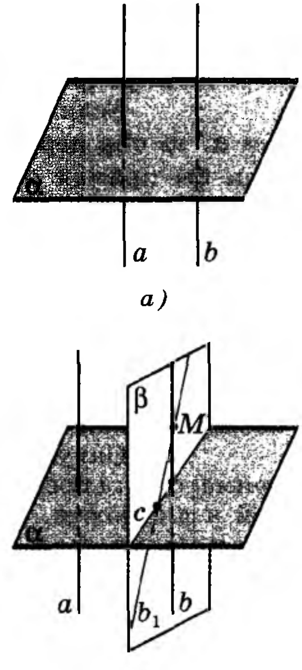


Рис. 47

17 Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Как проверить, перпендикулярна ли данная прямая к данной плоскости? Этот вопрос имеет практическое значение, например, при установке мачт, колонн зданий и т. д., которые нужно поставить прямо, т. е. перпендикулярно к той плоскости, на которую они ставятся. Оказывается, что для этого нет надобности проверять перпендикулярность по отношению к любой прямой, как о том говорится в определении, а достаточно проверить перпендикулярность лишь к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости. Это вытекает из следующей теоремы, выражающей признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство

Рассмотрим прямую a, которая перпендикулярна к прямым p и q, лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O (рис. 48, *а*). Докажем, что $a \perp \alpha$. Для этого нужно доказать, что прямая a перпендикулярна к произвольной прямой m плоскости α.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O (рис. 48, *б*). Проведем через точку O прямую l, параллельную прямой m (если прямая m проходит через точку O, то в качестве l возьмем саму прямую m). Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB, и проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые p, q и l соответственно в точках P, Q и L. Будем считать для определенности, что точка Q лежит между точками P и L (рис. 48, *б*).

Так как прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезку AB, то $AP = BP$ и $AQ = BQ$. Следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по трем сторонам. Поэтому $\angle APQ = \angle BPQ$.

Сравним треугольники APL и BPL. Они равны по двум сторонам и углу между ними ($AP = BP$, PL — общая сторона, $\angle APL = \angle BPL$), поэтому $AL = BL$. Но это означает, что треугольник ABL равнобедренный и его медиана LO является высотой, т. е. $l \perp a$. Так как $l \parallel m$ и $l \perp a$, то $m \perp a$ (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей). Итак, прямая a перпендикулярна к любой прямой m плоскости α, т. е. $a \perp \alpha$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую a_1, параллельную прямой a. По упомянутой лемме $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$, поэтому по доказанному в первом случае $a_1 \perp \alpha$. Отсюда (по первой теореме п. 16) следует, что $a \perp \alpha$. Теорема доказана.

Воспользуемся признаком перпендикулярности прямой и плоскости для решения следующей задачи.

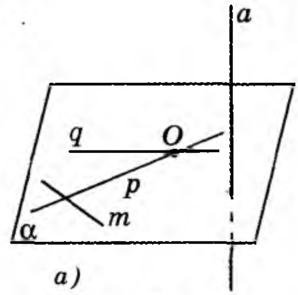
Задача

Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Решение

Обозначим данную прямую буквой a, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что существует плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a.

Проведем через прямую a две плоскости α и β так, чтобы $M \in \alpha$ (рис. 49)*. В плоскости α через точку M проведем прямую p, перпендикулярную к прямой a, а в плоскости β через точку пересечения прямых p и a проведем прямую q, перпендикулярную к прямой a. Рассмотрим плоскость γ, проходящую через прямые p и q. Плоскость γ является искомой, так как прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым p и q этой плоскости.



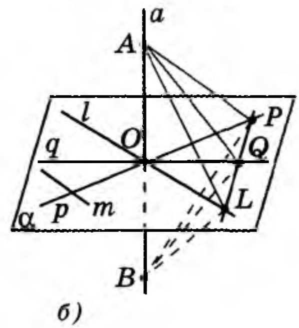


Рис. 48

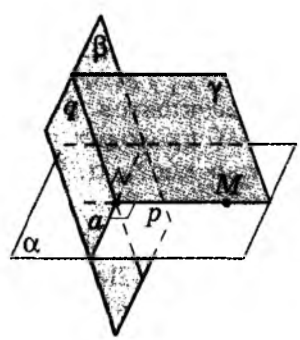


Рис. 49

---

* На рисунке 49 изображен тот случай, когда точка M не лежит на прямой a. Однако приведенное решение задачи пригодно и для того случая, когда точка M лежит на прямой a.

Замечание

Можно доказать, что γ — единственная плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a (задача 133).

18 Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Теорема

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

▼ Доказательство

Данную плоскость обозначим α, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что: 1) через точку M проходит прямая, перпендикулярная к плоскости α; 2) такая прямая только одна.

1) Проведем в плоскости α произвольную прямую a и рассмотрим плоскость β, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a (рис. 50). Обозначим буквой b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. В плоскости β через точку M проведем прямую c, перпендикулярную к прямой b. Прямая c и есть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости α, так как перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ($c \perp b$ по построению и $c \perp a$, так как $\beta \perp a$).

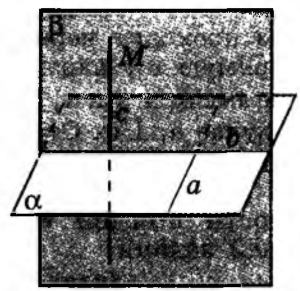


Рис. 50

2) Предположим, что через точку M проходит еще одна прямая (обозначим ее через c_1), перпендикулярная к плоскости α. Тогда (по обратной теореме п. 16) $c_1 \parallel c$, что невозможно, так как прямые c_1 и c пересекаются в точке M. Таким образом, через точку M проходит только одна прямая, перпендикулярная к плоскости α. Теорема доказана. △

Задачи

116 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что:
а) $DC \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$, если $\angle BAD = 90°$;
б) $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$, если $AB \perp DD_1$.

117 В тетраэдре $ABCD$ $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N — середины ребер AB и AC.

118 Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из следующих углов являются прямыми: $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$?

119 Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что: а) $AB = DB$; б) $AB = AC$, если $OB = OC$; в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

120 Через точку O пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки K до вершин квадрата, если $OK = b$.

121 В треугольнике ABC дано: $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. Через вершину C проведена прямая CK, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC, причем $CK = 12$ см. Найдите KM.

122 Прямая CD перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC. Через центр O этого треугольника проведена прямая OK, параллельная прямой CD. Известно, что AB $16\sqrt{3}$ см, $OK = 12$ см, $CD = 16$ см. Найдите расстояния от точек D и K до вершин A и B треугольника.

123 Докажите, что если две плоскости α и β перпендикулярны к прямой a, то они параллельны.

Решение

Проведем какую-нибудь прямую, параллельную прямой a, так, чтобы она пересекала плоскости α и β в различных точках A и B. По первой теореме п. 16 плоскости α и β перпендикулярны к прямой AB. Если допустить, что плоскости α и β не параллельны, т. е. имеют хотя бы одну общую точку M, то получим треугольник ABM с двумя прямыми углами при вершинах A и B, что невозможно. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$.

124 Прямая PQ параллельна плоскости α. Через точки P и Q проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α, которые пересекают эту плоскость соответственно в точках P_1 и Q_1. Докажите, что $PQ = P_1Q_1$.

125 Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1, если $PQ = 15$ см, $PP_1 = 21{,}5$ см, $QQ_1 = 33{,}5$ см.

126 Прямая MB перпендикулярна к сторонам AB и BC треугольника ABC. Определите вид треугольника MBD, где D — произвольная точка прямой AC.

127 В треугольнике ABC сумма углов A и B равна $90°$. Прямая BD перпендикулярна к плоскости ABC. Докажите, что $CD \perp AC$.

128 Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так, что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

129 Прямая AM перпендикулярна к плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что: а) прямая BD перпендикулярна к плоскости AMO; б) $MO \perp BD$.

130 Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BM. Известно, что $\angle MBA = \angle MBC = 90°$; $MB = m$, $AB = n$. Найдите расстояния от точки M до: а) вершин квадрата; б) прямых AC и BD.

131 В тетраэдре $ABCD$ точка M — середина ребра BC, $AB = AC$, $DB = DC$. Докажите, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна к прямой BC.

132 Докажите, что если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна к прямой, то и другая плоскость перпендикулярна к этой прямой.

133 Докажите, что через любую точку пространства проходит только одна плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Решение

Согласно задаче п. 17 через данную точку M проходит плоскость α, перпендикулярная к данной прямой a. Предположим, что через точку M проходит еще одна плоскость α_1, перпендикулярная к этой прямой. Тогда плоскости α и α_1 параллельны (см. задачу 123). Но это невозможно, так как эти плоскости имеют общую точку M. Следовательно, наше предположение неверно, и через точку M проходит только одна плоскость, перпендикулярная к прямой a.

134 Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку M прямой a и перпендикулярные к этой прямой, лежат в плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной к прямой a.

135 Прямая a перпендикулярна к плоскости α и перпендикулярна к прямой b, не лежащей в этой плоскости. Докажите, что $b \parallel \alpha$.

136 Докажите, что если точка X равноудалена от концов данного отрезка AB, то она лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной к прямой AB.

137 Докажите, что через каждую из двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых проходит плоскость, перпендикулярная к другой прямой.

§ 2 Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

19 Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим плоскость α и точку A, не лежащую в этой плоскости. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α, и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 51). Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости** α, а точка H — **основанием перпендикуляра**. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M, отличную от H, и проведем отрезок AM. Он называется **наклонной, проведенной из точки A к плоскости** α, а точка M — **основанием наклонной**. Отрезок HM называется **про-**

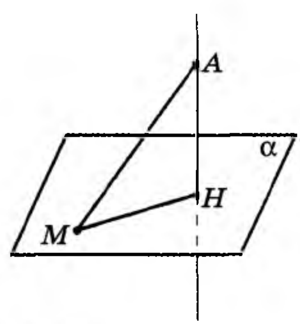


Рис. 51

екцией наклонной на плоскость** α. Сравним перпендикуляр AH и наклонную AM: в прямоугольном треугольнике AMH сторона AH — катет, а сторона AM — гипотенуза, поэтому $AH < AM$. Итак, **перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.**

Следовательно, из всех расстояний от точки A до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки H. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется **расстоянием от точки A до плоскости** α. Когда мы говорим, что некоторый предмет, например лампочка уличного фонаря, находится на такой-то высоте, скажем 6 м от земли, то имеем в виду, что расстояние от лампочки до поверхности земли измеряется по перпендикуляру, проведенному от лампочки к плоскости земли (рис. 52).

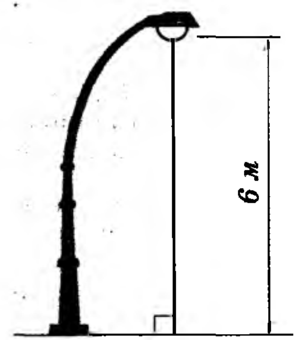


Рис. 52

Замечания

1. Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. В самом деле, рассмотрим перпендикуляры AA_0 и MM_0, проведенные из двух произвольных точек A и M плоскости α к параллельной ей плоскости β. Так как $AA_0 \perp \beta$ и $MM_0 \perp \beta$, то $AA_0 \parallel MM_0$. Отсюда следует, что $MM_0 = AA_0$ (свойство 2^0, п. 11), т. е. расстояние от любой точки M плоскости α до плоскости β равно длине отрезка AA_0. Очевидно, все точки плоскости β находятся на таком же расстоянии от плоскости α.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями.**

Как уже отмечалось, примером параллельных плоскостей служат плоскости пола и потолка комнаты. Все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Это расстояние и есть высота комнаты.

2. Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости (задача 144). В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.**

3. Если две прямые скрещивающиеся, то, как было доказано в п. 7, через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми.**

20 Теорема о трех перпендикулярах

Теорема

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Доказательство

Обратимся к рисунку 53, на котором отрезок AH — перпендикуляр к плоскости α, AM — наклонная, a — прямая, проведенная в плоскости α через точку M перпендикулярно к проекции HM наклонной. Докажем, что $a \perp AM$.

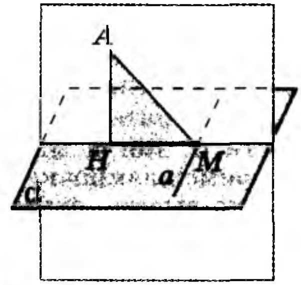


Рис. 53

Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AH и MH, лежащим в плоскости AMH ($a \perp HM$ по условию и $a \perp AH$, так как $AH \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности $a \perp AM$. Теорема доказана.

Эта теорема называется **теоремой о трех перпендикулярах**, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами AH, HM и AM.

Справедлива также **обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.** По аналогии с доказательством прямой теоремы, используя рисунок 53, докажите эту теорему самостоятельно (задача 153).

21 Угол между прямой и плоскостью

В п. 19 было дано определение проекции наклонной на плоскость. Введем теперь понятие проекции* произвольной фигуры. **Проекцией точки на плоскость** называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости. На рисунке 54 точка M_1 — проекция точки M на плоскость α, а N — проекция самой точки N на ту же плоскость ($N \in \alpha$).

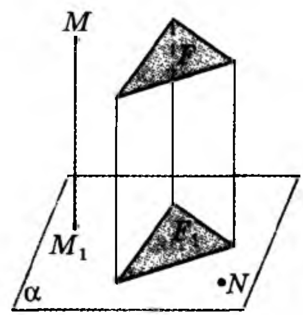


Рис. 54

Обозначим буквой F какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех то-

* В данном пункте речь идет о **прямоугольной** (или ортогональной) проекции фигуры. Более общее понятие параллельной проекции фигуры рассматривается в приложении 1.

чек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру F_1, которая называется **проекцией фигуры F на данную плоскость.** На рисунке 54 треугольник F_1 — проекция треугольника F на плоскость α.

Докажем теперь, что **проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.**

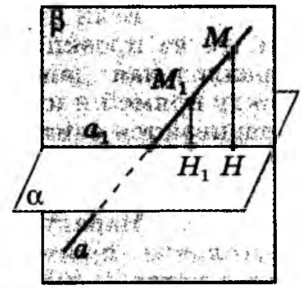


Рис. 55

Данную плоскость обозначим буквой α, а произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости α, — буквой a (рис. 55). Из какой-нибудь точки M прямой a проведем перпендикуляр MH к плоскости α и рассмотрим плоскость β, проходящую через a и MH. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой a_1. Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой a на плоскость α. В самом деле, возьмем произвольную точку M_1 прямой a и проведем в плоскости β прямую M_1H_1, параллельную прямой MH (H_1 — точка пересечения прямых M_1H_1 и a_1). По первой теореме п. 16 $M_1H_1 \perp \alpha$, и, значит, точка H_1 является проекцией точки M_1 на плоскость α. Мы доказали, что проекция произвольной точки прямой a лежит на прямой a_1. Аналогично доказывается, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a. Следовательно, a_1 — проекция прямой a на плоскость α.

Из доказанного утверждения следует, что проекцией отрезка AB, не перпендикулярного к плоскости, является отрезок, концами которого служат проекции точек A и B. Поэтому определение проекции наклонной (п. 19) полностью согласуется с общим определением проекции фигуры. Используя понятие проекции прямой на плоскость, дадим определение угла между прямой и плоскостью.

Определение

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Можно доказать, что угол φ_0 между данной прямой AM и плоскостью α (рис. 56) является наименьшим из всех углов φ, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A (задача 162).

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее проекцией на эту плоскость является точка пересечения этой прямой с плоскостью. В таком случае угол между прямой и плоскостью считается равным $90°$.

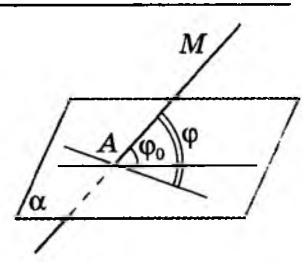


Рис. 56

Если данная прямая параллельна плоскости, то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной. В этом случае понятие угла между прямой и плоскостью мы не вводим. (Иногда договариваются считать, что угол между параллельными прямой и плоскостью равен 0°.)

▼ **Замечание**

Наряду с рассмотренной в этом пункте прямоугольной проекцией и параллельной проекцией, речь о которой пойдет в приложении 1, иногда используется центральная проекция. Она определяется так. Рассмотрим произвольную плоскость α и какую-нибудь точку O, не лежащую в этой плоскости. Пусть β — плоскость, проходящая через точку O и параллельная плоскости α. **Центральной проекцией** (с центром O) **точки** M, не лежащей в плоскости β, **на плоскость** α называется точка M_1 пересечения прямой OM с плоскостью α. **Центральной проекцией фигуры на плоскость** α называется множество центральных проекций на плоскость α всех точек этой фигуры, не лежащих в плоскости β. Примером центральной проекции фигуры является ее фотографический снимок. △

Задачи

138 Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен φ. а) Найдите наклонную и ее проекцию на данную плоскость, если перпендикуляр равен d. б) Найдите перпендикуляр и проекцию наклонной, если наклонная равна m.

139 Из некоторой точки проведены к плоскости две наклонные. Докажите, что: а) если наклонные равны, то равны и их проекции; б) если проекции наклонных равны, то равны и наклонные; в) если наклонные не равны, то бо́льшая наклонная имеет бо́льшую проекцию.

140 Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AO и две равные наклонные AB и AC. Известно, что $\angle OAB = \angle BAC = 60°$, $AO = 1{,}5$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

141 Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится от нее на расстоянии 6 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α.

142 Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.

143 Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если $AB = 6$ см.

144 Прямая a параллельна плоскости α. Докажите, что все точки прямой a равноудалены от плоскости α.

Решение

Через какую-нибудь точку прямой a проведем плоскость β, параллельную плоскости α (задача 59). Прямая a лежит в плоскости β, так как в противном случае она пересекает плоскость β, а значит, пересекает и плоскость α (задача 55), что невозможно. Все точки плоскости β равноудалены от плоскости α, поэтому и все точки прямой a, лежащей в плоскости β, равноудалены от плоскости α, что и требовалось доказать.

145 Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная к плоскости треугольника. а) Докажите, что треугольник CBD прямоугольный. б) Найдите BD, если $BC = a$, $DC = b$.

146 Прямая a пересекает плоскость α в точке M и не перпендикулярна к этой плоскости. Докажите, что в плоскости α через точку M проходит прямая, перпендикулярная к прямой a, и притом только одна.

147 Из точки M проведен перпендикуляр MB к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что треугольники AMD и MCD прямоугольные.

148 Прямая AK перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC, а точка M — середина стороны BC. Докажите, что $MK \perp BC$.

149 Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD = 12$ см. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.

150 Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см. Найдите: а) расстояние от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$; б) расстояние между прямыми AK и CD.

151 Прямая CD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Докажите, что: а) треугольник ABC является проекцией треугольника ABD на плоскость ABC; б) если CH — высота треугольника ABC, то DH — высота треугольника ABD.

152 Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BF, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки F до прямых, содержащих стороны и диагонали квадрата, если $BF = 8$ дм, $AB = 4$ дм.

153 Докажите, что прямая a, проведенная в плоскости α через основание M наклонной AM перпендикулярно к ней, перпендикулярна к ее проекции HM (см. рис. 53).

Решение

Прямая a перпендикулярна к плоскости AMH, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости

($a \perp AM$ по условию и $a \perp AH$, так как $AH \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности $a \perp HM$, что и требовалось доказать.

154 Прямая BD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Известно, что $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA = 13$ см. Найдите: а) расстояние от точки D до прямой AC; б) площадь треугольника ACD.

155 Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AC = 4$ см, а $CM = 2\sqrt{7}$ см.

156 Один из катетов прямоугольного треугольника ABC равен m, а острый угол, прилежащий к этому катету, равен φ. Через вершину прямого угла C проведена прямая CD, перпендикулярная к плоскости этого треугольника, $CD = n$. Найдите расстояние от точки D до прямой AB.

157 Прямая OK перпендикулярна к плоскости ромба $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. а) Докажите, что расстояния от точки K до всех прямых, содержащих стороны ромба, равны. б) Найдите это расстояние, если $OK = 4{,}5$ дм, $AC = 6$ дм, $BD = 8$ дм.

158 Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, если $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60°$, $BM = 12{,}5$ см.

159 Прямая BM перпендикулярна к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая, по которой пересекаются плоскости ADM и BCM, перпендикулярна к плоскости ABM.

160 Концы отрезка AB лежат на двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно d, причем $d < AB$. Докажите, что проекции отрезка AB на эти плоскости равны. Найдите эти проекции, если $AB = 13$ см, $d = 5$ см.

161 Луч BA не лежит в плоскости неразвернутого угла CBD. Докажите, что если $\angle ABC = \angle ABD$, причем $\angle ABC < 90°$, то проекцией луча BA на плоскость CBD является биссектриса угла CBD.

162 Прямая MA проходит через точку A плоскости α и образует с этой плоскостью угол $\varphi_0 \neq 90°$. Докажите, что φ_0 является наименьшим из всех углов, которые прямая MA образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A.

Решение

Обозначим буквой H основание перпендикуляра, проведенного из точки M к плоскости α, и рассмотрим произвольную прямую p в плоскости α, проходящую через точку A и отличную от прямой AH. Угол между прямыми AM и p обозначим через φ (рис. 57)

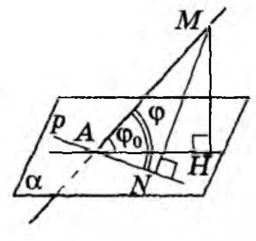


Рис. 57

и докажем, что $\varphi > \varphi_0$. Из точки M проведем перпендикуляр MN к прямой p. Если точка N совпадает с точкой A, то $\varphi = 90°$ и поэтому $\varphi > \varphi_0$. Рассмотрим случай, когда точки A и N не совпадают (см. рис. 57). Отрезок AM — общая гипотенуза прямоугольных треугольников ANM и AHM, поэтому $\sin\varphi = \frac{MN}{AM}$, $\sin\varphi_0 = \frac{MH}{AM}$. Так как $MN > MH$ (MN — наклонная, MH — перпендикуляр), то из этих двух равенств следует, что $\sin\varphi > \sin\varphi_0$ и поэтому $\varphi > \varphi_0$.

163 Наклонная AM, проведенная из точки A к данной плоскости, равна d. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен: а) 45°; б) 60°; в) 30°?

164 Под углом φ к плоскости α проведена наклонная. Найдите φ, если известно, что проекция наклонной вдвое меньше самой наклонной.

165 Из точки A, удаленной от плоскости γ на расстояние d, проведены к этой плоскости наклонные AB и AC под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость γ образуют угол в 120°. Найдите BC.

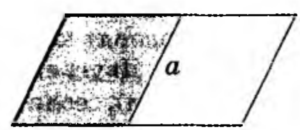
§3 Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

22 Двугранный угол

Углом на плоскости мы называем фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки. В стереометрии наряду с такими углами рассматривается еще один вид углов — **двугранные углы**. Чтобы ввести понятие двугранного угла, напомним, что любая прямая, проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости (рис. 58, *а*). Представим себе, что мы перегнули плоскость по прямой a так, что две полуплоскости с границей a оказались уже не лежащими в одной плоскости (рис. 58, *б*). Полученная фигура и есть двугранный угол.

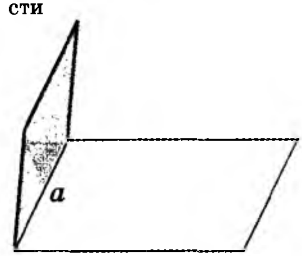
Таким образом, можно дать такое определение двугранного угла: **двугранным углом называется фигура, образованная прямой *a* и двумя полуплоскостями с общей границей *a*, не принадлежащими одной плоскости.** Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его **гранями**. У двугранного угла две грани, отсюда и название — двугранный угол. Прямая a — общая граница полуплоскостей — называется **ребром** двугранного угла.

Двугранный угол с ребром AB, на разных гранях которого отмечены точки C и D, называют двугранным углом $CABD$.



а)

Прямая *a* разделяет плоскость на две полуплоскости



б)

Двугранный угол

Рис. 58

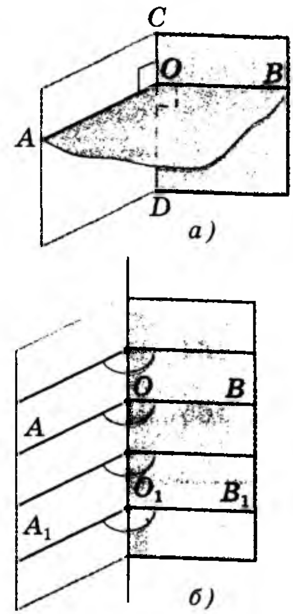
В обыденной жизни мы часто встречаемся с предметами, имеющими форму двугранного угла. Такими предметами являются двускатные крыши зданий, полураскрытая папка, стена комнаты совместно с полом и т. д.

Мы знаем, что углы на плоскости (обычные углы) измеряются в градусах. А как измеряются двугранные углы? Это делается следующим образом. Отметим на ребре двугранного угла какую-нибудь точку и в каждой грани из этой точки проведем луч перпендикулярно к ребру. Образованный этими лучами угол называется **линейным углом двугранного угла**. На рисунке 59, *а* угол AOB — линейный угол двугранного угла с ребром CD. Так как $OA \perp CD$ и $OB \perp CD$, то плоскость AOB перпендикулярна к прямой CD. Таким образом, плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла. Очевидно, двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов (рис. 59, *б*).

Докажем, что **все линейные углы двугранного угла равны друг другу**. Рассмотрим два линейных угла AOB и $A_1O_1B_1$ (см. рис. 59, *б*). Лучи OA и O_1A_1 лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой OO_1, поэтому они сонаправлены. Точно так же сонаправлены лучи OB и O_1B_1. Поэтому $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$ (как углы с сонаправленными сторонами).

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. На рисунке 60, *а* градусная мера двугранного угла равна 45°. Обычно говорят коротко: «Двугранный угол равен 45°».

Двугранный угол называется **прямым (острым, тупым)**, если он равен 90° (меньше 90°, больше 90°). Двугранный угол, изображенный на рисунке 60, *б*, прямой, на рисунке 60, *а* — острый, а на рисунке 60, *в* — тупой.



Линейный угол двугранного угла

Рис. 59

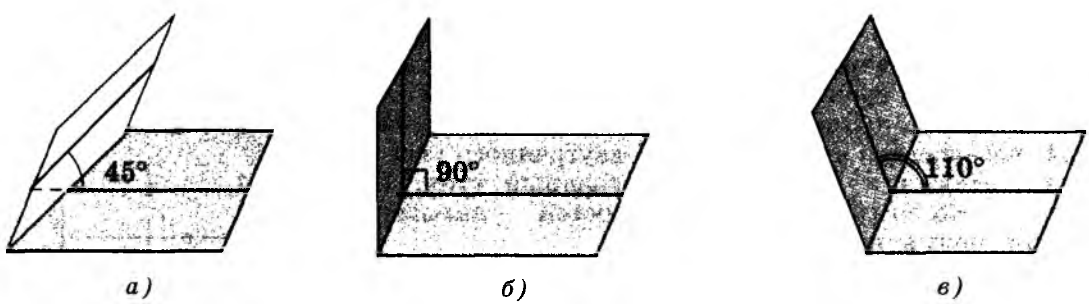
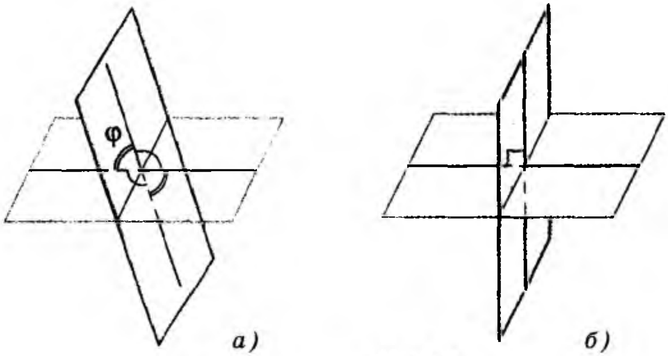


Рис. 60



а) *б)*

Рис. 61

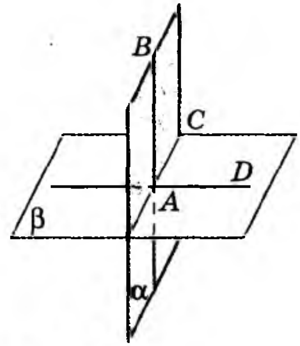


Рис. 62

23 Признак перпендикулярности двух плоскостей

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 61, *а*). Если один из этих двугранных углов равен φ, то другие три угла равны соответственно 180° – φ, φ и 180° – φ. В частности, если один из углов прямой (φ = 90°), то и остальные три угла прямые. Если φ — тот из четырех углов, который не превосходит каждого из остальных, то говорят, что **угол между пересекающимися плоскостями равен** φ. Очевидно, $0° < \varphi \leqslant 90°$.

Определение

Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90° (рис. 61, *б*).

Примером взаимно перпендикулярных плоскостей служат плоскости стены и пола комнаты. Ясно, что все четыре двугранных угла, образованные взаимно перпендикулярными плоскостями, прямые.

Рассмотрим признак перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство

Рассмотрим плоскости α и β такие, что плоскость α проходит через прямую *AB*, перпендикулярную к плоскости β и пересекающуюся с ней в точке A (рис. 62). Докажем, что $\alpha \perp \beta$. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC, причем $AB \perp AC$, так как по условию $AB \perp \beta$, т. е. прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β.

Проведем в плоскости β прямую AD, перпендикулярную к прямой AC. Тогда угол BAD — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β. Но $\angle BAD = 90°$ (так как $AB \perp \beta$). Следовательно, угол между плоскостями α и β равен $90°$, т. е. $\alpha \perp \beta$. Теорема доказана.

Следствие

Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей (рис. 63).

24 Прямоугольный параллелепипед

Параллелепипед называется **прямоугольным**, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники. Форму прямоугольного параллелепипеда имеют многие предметы: коробки, ящики, комнаты и т. д. На рисунке 64 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его основаниями служат прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, а боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны к основаниям. Отсюда следует, что $AA_1 \perp AB$, т. е. боковая грань AA_1B_1B — прямоугольник. То же самое можно сказать и об остальных боковых гранях. Таким образом, мы обосновали следующее свойство прямоугольного параллелепипеда:

1°. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней — прямоугольники.

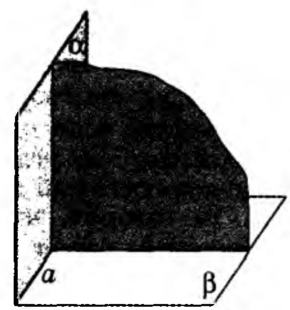
Полуплоскости, в которых расположены смежные грани параллелепипеда, образуют двугранные углы, которые называются **двугранными углами параллелепипеда.**

Докажите самостоятельно, что:

2°. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.

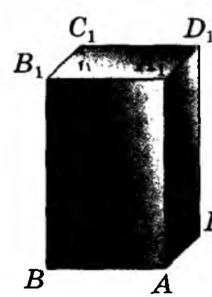
Теперь рассмотрим одно из самых замечательных свойств прямоугольного параллелепипеда.

Длины трех ребер, имеющих общую вершину, назовем **измерениями** прямоугольного параллелепипеда. Например, у параллелепипеда, изображенного



Если $\gamma \perp a$, то $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$

Рис. 63



Прямоугольный параллелепипед

Рис. 64

на рисунке 64, в качестве измерений можно взять длины ребер AB, AD и AA_1.

В обыденной практике, говоря о размерах комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, вместо слова «измерения» используют обычно слова «длина», «ширина» и «высота» комнаты. Ясно, что длина, ширина и высота комнаты — это и есть ее измерения.

Прежде чем сформулировать свойство параллелепипеда, связанное с его измерениями, вспомним, что в прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов смежных сторон.

Длины смежных сторон можно назвать измерениями прямоугольника, и поэтому **квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений.** Оказывается, аналогичным свойством обладает и прямоугольный параллелепипед.

Теорема

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Доказательство

Обратимся к рисунку 64, на котором изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и докажем, что

$$AC_1^2 \quad AB^2 \quad AD^2 \quad AA_1^2.$$

Так как ребро CC_1 перпендикулярно к основанию $ABCD$, то угол ACC_1 прямой. Из прямоугольного треугольника ACC_1 по теореме Пифагора получаем

$$AC_1^2 \quad AC^2 \quad CC_1^2.$$

Но AC — диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Кроме того, $CC_1 = AA_1$. Следовательно, $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$. Теорема доказана.

Следствие

Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется **кубом**. Все грани куба — равные друг другу квадраты.

25* Трехгранный угол

Рассмотрим три луча с общим началом O — OA, OB и OC, не лежащие в одной плоскости. Фигура, состоящая из углов AOB, BOC, COA и их внутренних областей, называется **трехгранным углом** $OABC$, а указанные углы — **плоскими углами** этого **трехгранного угла.**

Докажем, что **каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.** Рассмотрим трехгранный угол $OABC$ и для определенности будем считать, что $\angle BOC \geqslant \angle AOC \geqslant \angle AOB$. Достаточно доказать, что $\angle BOC < \angle AOB + \angle AOC$ (объясните почему). Если $\angle BOC = \angle AOB$, то справедливость этого неравенства очевидна. В противном случае ($\angle BOC > \angle AOB$) поступим так.

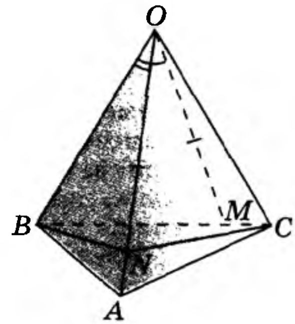
На луче BC выберем точку M так, чтобы угол MOB оказался равным углу AOB (рис. 65, *а*). Поскольку $\angle BOC > \angle AOB$, то точка M будет лежать между точками B и C. Далее, на луче OA отложим отрезок $ON = OM$. Треугольники BON и BOM равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $BN = BM$.

В треугольнике BCN имеем: $BM + MC = BC < BN + NC = BM + NC$, откуда находим: $MC < NC$.

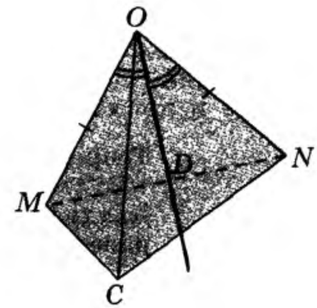
Разогнем двугранный угол с ребром OC так, чтобы точки M, N, O и C оказались лежащими в одной плоскости, и проведем биссектрису OD треугольника MON (рис. 65, *б*). Поскольку треугольник MON — равнобедренный, то отрезок OD является его медианой и высотой: $MD = DN$, $OD \perp MN$. Таким образом, прямая OD проходит через середину стороны MN треугольника MNC и перпендикулярна к этой стороне. Следовательно, она пересекает большую из сторон MC и NC (докажите это), т. е. сторону NC. Поэтому $\angle MOC < \angle NOC$. Обратимся теперь к рисунку 65, *а*. Мы видим, что

$$\angle BOC = \angle MOB + \angle MOC =$$
$$= \angle AOB + \angle MOC < \angle AOB + \angle NOC = \angle AOB + \angle AOC,$$

что и требовалось доказать.



а)



б)

Рис. 65

26* Многогранный угол

Рассмотрим фигуру, составленную из углов A_1OA_2, A_2OA_3, ... , A_nOA_1 и их внутренних областей так, что смежные углы (т. е. углы A_1OA_2 и A_2OA_3, ... , A_nOA_1 и A_1OA_2) не лежат в одной плоскости, а несмежные углы (с их внутренними областями) не имеют общих точек. Такая фигура называется **многогранным углом** $OA_1A_2 \ldots A_n$, углы, из которых составлен этот многогранный угол, — **плоскими углами**, лучи OA_1, OA_2, ... , OA_n — **ребрами**, а точка O — **вершиной** этого многогранного угла. Примером многогранного угла является трехгранный угол.

Многогранный угол называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от плоскости каждого из своих плоских углов. В частности, трехгранный угол — выпуклый (объясните почему).

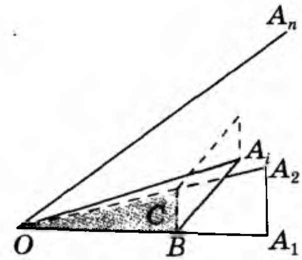


Рис. 66

Докажем, что **для любого выпуклого многогранного угла существует плоскость, пересекающая все его ребра.** Рассмотрим ребра OA_1 и OA_2 многогранного угла $OA_1A_2 \dots A_n$. Поскольку данный многогранный угол — выпуклый, то точки $A_3, \dots, A_n$ лежат по одну сторону от плоскости OA_1A_2.

Проведем среднюю линию BC треугольника OA_1A_2 (рис. 66) и выберем из ребер $OA_3, \dots, OA_n$ то ребро OA_i, для которого величина двугранного угла $OBCA_i$ имеет наименьшее значение (на рисунке грани этого двугранного угла закрашены). Рассмотрим полуплоскость с границей BC, делящую двугранный угол $OBCA_i$ на два двугранных угла (на рисунке эта полуплоскость не изображена). Все вершины $A_1, \dots, A_n$ лежат по одну сторону от плоскости α, содержащей эту полуплоскость, а точка O — по другую сторону от плоскости α (объясните почему). Следовательно, плоскость α пересекает все ребра $OA_1, \dots, OA_n$. Утверждение доказано.

Выпуклые многогранные углы обладают еще одним важным свойством.

Теорема

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Доказательство

Рассмотрим выпуклый многогранный угол с вершиной O и проведем плоскость, пересекающую все его ребра в некоторых точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (рис. 67). Ясно, что многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ — выпуклый. Имеем

$$\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_nOA_1 =$$
$$= (180° - \angle OA_1A_2 - \angle OA_2A_1) + (180° - \angle OA_2A_3 - \angle OA_3A_2) + \dots$$
$$\dots + (180° - \angle OA_nA_1 - \angle OA_1A_n) =$$
$$= 180° \cdot n - (\angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2) - (\angle OA_2A_1 + \angle OA_2A_3) - \dots$$
$$\dots - (\angle OA_nA_{n-1} + \angle OA_nA_1).$$

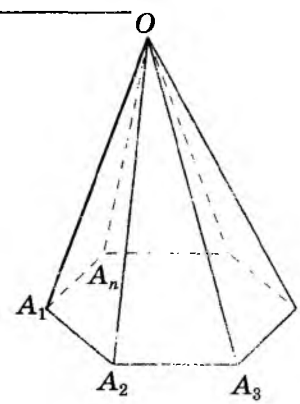


Рис. 67

Но сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла (см. п. 25), поэтому

$$\angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2 > \angle A_nA_1A_2, \ldots,$$
$$\angle OA_nA_{n-1} + \angle OA_nA_1 > \angle A_{n-1}A_nA_1.$$

Следовательно, искомая сумма меньше, чем

$$180^\circ \cdot n - (\angle A_nA_1A_2 + \angle A_1A_2A_3 + \ldots + \angle A_{n-1}A_nA_1) =$$
$$= 180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ.$$

Теорема доказана.

Задачи

166 Неперпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN. В плоскости β из точки A проведен перпендикуляр AB к прямой MN и из той же точки A проведен перпендикуляр AC к плоскости α. Докажите, что $\angle ABC$ — линейный угол двугранного угла $AMNC$.

167 В тетраэдре $DABC$ все ребра равны, точка M — середина ребра AC. Докажите, что $\angle DMB$ — линейный угол двугранного угла $BACD$.

168 Двугранный угол равен φ. На одной грани этого угла лежит точка, удаленная на расстояние d от плоскости другой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

169 Даны два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани являются различными полуплоскостями одной плоскости. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна 180°.

170 Из вершины B треугольника ABC, сторона AC которого лежит в плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1. Найдите расстояния от точки B до прямой AC и до плоскости α, если $AB = 2$ см, $\angle BAC = 150^\circ$ и двугранный угол $BACB_1$ равен 45°.

171 Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α, а катет наклонен к этой плоскости под углом 30°. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника.

172 Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями α и ABC равен 60°. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC = 5$ см, $AB = 13$ см.

173 Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC, $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

174 Найдите двугранный угол $ABCD$ тетраэдра $ABCD$, если углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.

175 Докажите, что если все ребра тетраэдра равны, то все его двугранные углы также равны. Найдите эти углы.

176 Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость ADM так, что двугранный угол $BADM$ равен 60°. Найдите сторону ромба, если $\angle BAD = 45^\circ$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $4\sqrt{3}$.

177 Докажите, что плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

178 Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c. Докажите, что любая прямая плоскости α, перпендикулярная к прямой c, перпендикулярна к плоскости β.

Решение

Проведем в плоскости α произвольную прямую AC, перпендикулярную к прямой c, $C \in c$. Докажем, что $CA \perp \beta$.

В плоскости β через точку C проведем прямую CB, перпендикулярную к прямой c. Так как $CA \perp c$ и $CB \perp c$, то $\angle ACB$ — линейный угол одного из двугранных углов, образованных плоскостями α и β. По условию задачи $\alpha \perp \beta$, поэтому $\angle ACB$ — прямой, т. е. $CA \perp CB$. Таким образом, прямая CA перпендикулярна к двум пересекающимся прямым c и CB плоскости β, поэтому $CA \perp \beta$.

179 Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Через некоторую точку плоскости α проведена прямая, перпендикулярная к плоскости β. Докажите, что эта прямая лежит в плоскости α.

180 Докажите, что плоскость и не лежащая в ней прямая, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны.

181 Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB соответственно к плоскостям α и β. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Докажите, что $MC \perp a$.

182 Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. а) Докажите, что четырехугольник $ACBM$ является прямоугольником. б) Найдите расстояние от точки M до прямой a, если $AM = m$, $BM = n$.

183 Плоскости α и β пересекаются по прямой a и перпендикулярны к плоскости γ. Докажите, что прямая a перпендикулярна к плоскости γ.

184 Общая сторона AB треугольников ABC и ABD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите CD, если треугольники: а) равносторонние; б) прямоугольные равнобедренные с гипотенузой AB.

185 Прямая a не перпендикулярна к плоскости α. Докажите, что существует плоскость, проходящая через прямую a и перпендикулярная к плоскости α.

Решение

Через произвольную точку M прямой a проведем прямую p, перпендикулярную к плоскости α, и рассмотрим плоскость β, проходящую через прямые a и p. Плоскость β является искомой, так как она проходит через прямую a и по признаку перпендикулярности двух плоскостей перпендикулярна к плоскости α.

186 Докажите, что существует, и притом только одна, прямая, пересекающая две данные скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярная к каждой из них.

Решение

Рассмотрим плоскость α, проходящую через прямую a и параллельную прямой b. Через прямые a и b проведем плоскости β и γ так, чтобы $\beta \perp \alpha$ и $\gamma \perp \alpha$ (задача 185). Докажите самостоятельно, что прямая p, по которой пересекаются плоскости β и γ, искомая.

Докажем, что p — единственная прямая, удовлетворяющая условию задачи. Предположим, что существуют две прямые A_1B_1 и A_2B_2, пересекающие данные скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярные к каждой из них (рис. 68). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 перпендикулярны к плоскости α (объясните почему), поэтому они параллельны. Отсюда следует, что скрещивающиеся прямые a и b лежат в одной плоскости, что противоречит определению скрещивающихся прямых.

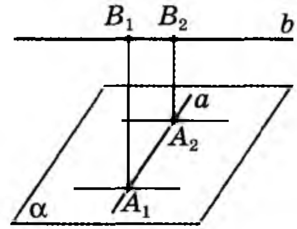


Рис. 68

187 Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 1, 1, 2; б) 8, 9, 12; в) $\sqrt{39}$, 7, 9.

188 Ребро куба равно a. Найдите диагональ куба.

189 Найдите расстояние от вершины куба до плоскости любой грани, в которой не лежит эта вершина, если: а) диагональ грани куба равна m; б) диагональ куба равна d.

190 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите следующие двугранные углы: а) ABB_1C; б) ADD_1B; в) A_1BB_1K, где K — середина ребра A_1D_1.

191 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости ABC_1 и A_1B_1D перпендикулярны.

192 Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

193 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $D_1B = d$, $AC = m$, $AB = n$. Найдите расстояние между: а) прямой A_1C_1 и плоскостью ABC; б) плоскостями ABB_1 и DCC_1; в) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1.

194 Ребро куба равно a. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими: а) диагональ куба и ребро куба; б) диагональ куба и диагональ грани куба.

195 Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 12$ см и диагональ BD_1 составляет с плоскостью грани AA_1D_1D угол в 30°, а с ребром DD_1 — угол в 45°.

196 Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро AA_1 и перпендикулярной к плоскости BB_1D_1; б) ребро AB и перпендикулярной к плоскости CDA_1.

Вопросы к главе II

1 Верно ли утверждение: если две прямые в пространстве перпендикулярны к третьей прямой, то эти прямые параллельны? Верно ли это утверждение при условии, что все три прямые лежат в одной плоскости?

2 Параллельные прямые b и c лежат в плоскости α, а прямая a перпендикулярна к прямой b. Верно ли утверждение: а) прямая a перпендикулярна к прямой c; б) прямая a пересекает плоскость α?

3 Прямая a перпендикулярна к плоскости α, а прямая b не перпендикулярна к этой плоскости. Могут ли прямые a и b быть параллельными?

4 Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b перпендикулярна к этой плоскости. Верно ли утверждение, что прямые a и b взаимно перпендикулярны?

5 Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b перпендикулярна к этой плоскости. Существует ли прямая, перпендикулярная к прямым a и b?

6 Верно ли утверждение, что все прямые, перпендикулярные к данной плоскости и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости?

7 Могут ли две плоскости, каждая из которых перпендикулярна к третьей плоскости, быть: а) параллельными плоскостями; б) перпендикулярными плоскостями?

8 Можно ли через точку пространства провести три плоскости, каждые две из которых взаимно перпендикулярны?

9 Диагональ квадрата перпендикулярна к некоторой плоскости. Как расположена другая диагональ квадрата по отношению к этой плоскости?

10 Сколько двугранных углов имеет: а) тетраэдр; б) параллелепипед?

Дополнительные задачи

197 Отрезок BM перпендикулярен к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая CD перпендикулярна к плоскости MBC.

198 Точка A лежит в плоскости α, а точка B удалена от этой плоскости на расстояние 9 см. Точка M делит отрезок AB в отношении $4 : 5$, считая от точки A. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

199 Точка S равноудалена от вершин прямоугольного треугольника и не лежит в плоскости этого треугольника. Докажите, что прямая SM, где M — середина гипотенузы, перпендикулярна к плоскости треугольника.

200 Докажите, что любая точка прямой, которая проходит через центр окружности, описанной около многоугольника, и перпендикулярна к плоскости многоугольника, равноудалена от вершин этого многоугольника.

201 Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB и PQ, если точки P и Q равноудалены от концов отрезка AB.

202 Точка удалена от каждой из вершин прямоугольного треугольника на расстояние 10 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника находится эта точка, если медиана, проведенная к гипотенузе, равна 5 см?

203 Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки K до сторон треугольника, если $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $OK = 4$ см.

204 Прямая OM перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC и проходит через центр O этого треугольника, $OM = a$, $\angle MCO = \varphi$. Найдите: а) расстояние от точки M до каждой из вершин треугольника ABC и до прямых AB, BC и CA; б) длину окружности, описанной около треугольника ABC; в) площадь треугольника ABC.

205 Через вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CD, перпендикулярная к плоскости этого треугольника. Найдите площадь треугольника ABD, если $CA = 3$ дм, $CB = 2$ дм, $CD = 1$ дм.

206 Стороны треугольника равны 17 см, 15 см и 8 см. Через вершину A меньшего угла треугольника проведена прямая AM, перпендикулярная к его плоскости. Определите расстояние от точки M до прямой, содержащей меньшую сторону треугольника, если известно, что $AM = 20$ см.

207 В треугольнике ABC дано: $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. Точка M удалена от прямых AB, BC и AC на $8\frac{2}{3}$ см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если ее проекция на эту плоскость лежит внутри треугольника.

208 Из точки K, удаленной от плоскости α на 9 см, проведены к плоскости α наклонные KL и KM, образующие между собой прямой угол, а с плоскостью α — углы в 45° и 30° соответственно. Найдите отрезок LM.

209 Углы между равными отрезками AB и AC и плоскостью α, проходящей через точку A, равны соответственно 40° и 50°. Сравните расстояния от точек B и C до плоскости α.

210 На рисунке 69 двугранные углы $HABP$ и $PABQ$ равны. Докажите, что каждая точка плоскости ABP равноудалена от плоскостей ABH и ABQ.

211 Плоскости правильного треугольника KDM и квадрата $KMNP$ взаимно перпендикулярны. Найдите DN, если $KM = a$.

212 Точка C является проекцией точки D на плоскость треугольника ABC. Докажите, что площадь треугольника ABD равна $\frac{S}{\cos\alpha}$, где

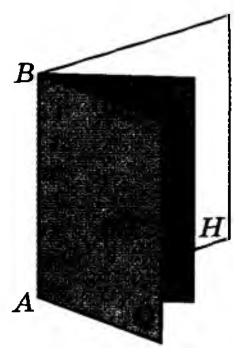


Рис. 69

S — площадь треугольника ABC, а α — угол между плоскостями ABC и ABD.

213 Правильные треугольники ABC и DBC расположены так, что вершина D проектируется в центр треугольника ABC. Вычислите угол между плоскостями этих треугольников.

214 Проекцией прямоугольника $ABCD$ на плоскость α является квадрат ABC_1D_1. Вычислите угол φ между плоскостью α и плоскостью прямоугольника $ABCD$, если $AB : BC = 1 : 2$.

215 Параллельные прямые AB и CD лежат в разных гранях двугранного угла, равного $60°$. Точки A и D удалены от ребра двугранного угла соответственно на 8 см и 6,5 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

216 Точки A и B лежат на ребре данного двугранного угла, равного $120°$. Отрезки AC и BD проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла. Найдите отрезок CD, если $AB = AC = BD = a$.

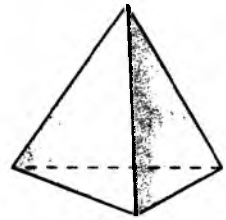
217 Сумма площадей трех граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 дм^2, а его ребра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.

Глава III
Многогранники

§ 1 Понятие многогранника. Призма

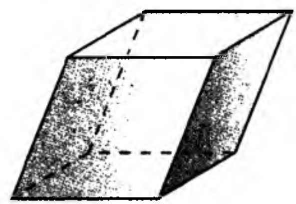
27 Понятие многогранника

В главе I мы рассмотрели тетраэдр и параллелепипед: тетраэдр — поверхность, составленная из четырех треугольников (рис. 70, *а*), параллелепипед — поверхность, составленная из шести параллелограммов (рис. 70, *б*). Каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства.



а)

Тетраэдр

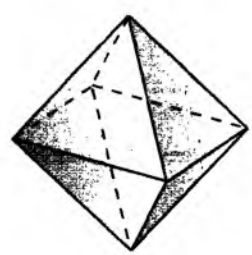


б)

Параллелепипед

Рис. 70

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или **многогранником**. Тетраэдр и параллелепипед — примеры многогранников. На рисунке 71 изображен еще один многогранник — **октаэдр**. Он составлен из восьми треугольников. Тело, ограниченное многогранником, часто также называют многогранником.



Октаэдр

Рис. 71

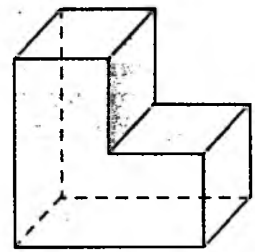
Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями***. Гранями тетраэдра и октаэдра являются треугольники (рис. 70, *а* и 71), гранями параллелепипеда — параллелограммы (рис. 70, *б*). Стороны граней называются **ребрами**, а концы ребер — **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника. Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки многогранника, называется **секущей плоскостью**, а общая часть многогранника и секущей плоскости — **сечением** многогранника.

Многогранники бывают **выпуклые и невыпуклые**. Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. Тетраэдр, параллелепипед и октаэдр — выпук-

* При этом предполагается, что никакие две соседние грани многогранника не лежат в одной плоскости.

лые многогранники. На рисунке 72 изображен невыпуклый многогранник.

Ясно, что все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. Отметим также, что в **выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°** (см. п. 26). Рисунок 73 поясняет это утверждение: многогранник «разрезан» вдоль ребер и все его грани с общей вершиной A развернуты так, что оказались расположенными в одной плоскости α. Видно, что сумма всех плоских углов при вершине A, т. е. $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, меньше $360°$.



Невыпуклый многогранник

Рис. 72

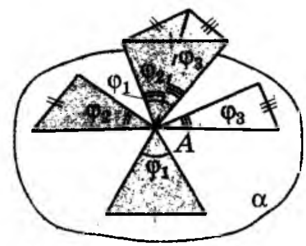


Рис. 73

28* Геометрическое тело

Мы отметили, что многогранник ограничивает некоторое геометрическое тело. Уточним понятие геометрического тела.

Точка M называется **граничной** точкой данной фигуры F, если среди сколь угодно близких к ней точек (включая ее саму) есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Множество всех граничных точек фигуры называется ее **границей.** Так, например, границей шара является сфера.

Точка фигуры, не являющаяся граничной, называется **внутренней** точкой фигуры. Каждая внутренняя точка фигуры характеризуется тем, что все достаточно близкие к ней точки пространства также принадлежат фигуре. Так, любая точка шара, не лежащая на сфере — его границе, является внутренней точкой шара.

Фигура называется **ограниченной**, если ее можно заключить в какую-нибудь сферу. Очевидно, шар, тетраэдр, параллелепипед — ограниченные фигуры, а прямая и плоскость — неограниченные.

Фигура называется **связной**, если любые две ее точки можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей данной фигуре. Примерами связных фигур являются тетраэдр (см. рис. 70, *а*), параллелепипед (см. рис. 70, *б*), октаэдр (см. рис. 71), плоскость. Фигура, состоящая из двух параллельных плоскостей, не является связной.

Геометрическим телом (или просто **телом**) называют ограниченную связную фигуру в пространстве, которая содержит все свои граничные точки, причем сколь угодно близко от любой граничной точки находятся внутренние точки фигуры. Границу тела называют также его **поверхностью** и говорят, что поверхность **ограничивает** тело.

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется **секущей плоскостью.** Фигура, которая образуется при пересечении тела плоскостью (т. е. общая часть тела и секущей плоскости), называется **сечением** тела.

29* Теорема Эйлера

Сейчас мы докажем удивительную теорему, связанную с именем выдающегося математика Леонарда Эйлера (1707—1783), швейцарца по происхождению, большую часть жизни работавшего в России.

Теорема

В любом выпуклом многограннике сумма числа граней и числа вершин больше числа ребер на 2.

Доказательство

Рассмотрим произвольный выпуклый многогранник, имеющий e вершин, f граней и k ребер. Докажем, что $f + e - k = 2$.

Выберем произвольную грань G, отметим какую-нибудь точку M ее внутренней области и проведем из нее луч h, перпендикулярный к плоскости этой грани и лежащий по ту сторону от нее, по которую нет точек многогранника. Если плоскости каких-либо других граней пересекают луч h, то выберем на нем точку O, лежащую между M и ближайшей к M точкой пересечения; в противном случае возьмем в качестве точки O произвольную точку луча h (рис. 74). Тогда точка O окажется лежащей по ту же сторону от плоскости каждой грани многогранника, отличной от G, что и сам многогранник.

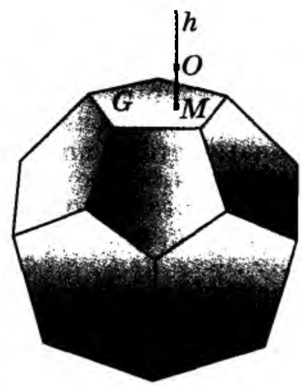


Рис. 74

Удалим теперь грань G. В результате получим многогранную поверхность F, имеющую те же ребра и вершины, что и исходный многогранник, число граней которой равно $f - 1$. Любой луч с началом O пересекает поверхность F не более чем в одной точке (поскольку после пересечения лучом поверхности F он «уходит» в то полупространство, в котором точек поверхности F нет). Примем точку O за центр проектирования и рассмотрим центральную проекцию поверхности F на плоскость грани G (рис. 75; грань G на этом рисунке изображена в увеличенном масштабе). Она представляет собой грань G, составленную из $f - 1$ вы-

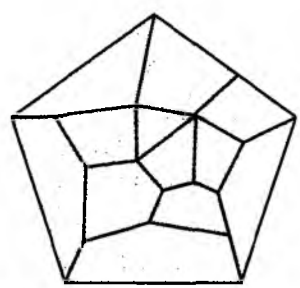


Рис. 75

пуклых многоугольников — проекций остальных граней (докажите, что эти многоугольники — выпуклые). Число вершин этих многоугольников равно e, а число сторон равно k. Если провести диагональ какого-нибудь из них, то число вершин не изменится, число многоугольников увеличится на 1, число сторон также увеличится на 1, поэтому разность числа многоугольников и числа сторон не изменится (см. рис. 75). Следовательно, если каждый многоугольник разделить диагоналями на треугольники, то грань G окажется разделенной на f' треугольников с e' вершинами и k' сторонами, причем

$$f + e' - k' = (f - 1) + e - k.$$

Пусть n — число сторон грани G. Каждый из треугольников имеет три стороны, поэтому число k' меньше числа $3f'$ на число сторон, каждая из которых принадлежит одновременно двум треугольникам, т. е. на $k' - n$:

$$k' = 3f' - (k' - n).$$

Отсюда получаем: $n = 2k' - 3f'$.

Сумма углов всех треугольников, с одной стороны, равна $f' \cdot 180°$, с другой — сумме углов n-угольника G плюс $360°$, умноженных на число $e' - n$ вершин, лежащих внутри G:

$$f' \cdot 180° = (n - 2) \cdot 180° + 360° \cdot (e' - n).$$

Отсюда находим

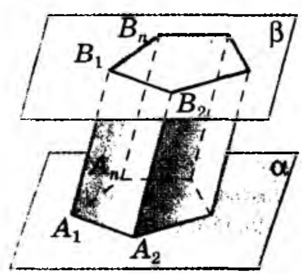
$$f' = 2e' - n - 2 = 2e' - (2k' - 3f') - 2,$$

т. е. $f' + e' - k' = 1$. Но $f' + e' - k' = (f - 1) + e - k$. Следовательно, $f + e - k = 2$. Теорема доказана.

30 Призма

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 76). Каждый из n четырехугольников

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \ldots,\ A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$



Призма. Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ — основания призмы. Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — боковые грани

Рис. 76

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырехугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 — по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью (п. 11).

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется **призмой** (см. рис. 76).

Многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называются **основаниями**, а параллелограммы (1) — **боковыми гранями** призмы. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n называются **боковыми ребрами** призмы. Эти ребра как противоположные стороны параллелограммов (1), последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны. Призму с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ и называют **n-угольной призмой.** На рисунке 77 изображены треугольная и шестиугольная призмы, а на рисунке 70, *б* — четырехугольная призма, являющаяся параллелепипедом.

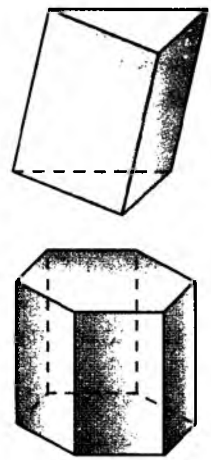


Рис. 77

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** призмы.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае — **наклонной.** Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники (объясните почему). На рисунке 77 изображена правильная шестиугольная призма.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а **площадью боковой поверхности призмы** — сумма площадей ее боковых граней. Площадь $S_{\text{полн}}$ полной поверхности выражается через площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн}}$ основания призмы формулой

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Докажем теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.

Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство

Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т. е. равна сумме произведений сторон основания на высоту h. Вынося множитель h за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т. е. его периметр P. Итак, $S_{бок} = Ph$. Теорема доказана.

31* Пространственная теорема Пифагора

Решим сначала такую задачу.

Задача

Найти площадь S_1 прямоугольной проекции многоугольника с площадью S на плоскость α, если угол между плоскостью многоугольника и плоскостью α равен φ ($0° < \varphi < 90°$).

Решение

а) Начнем с того случая, когда данный многоугольник является треугольником, одна из сторон которого лежит в плоскости α. Обратимся к рисунку 78, *а*, на котором сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α, отрезок CC_1 — перпендикуляр, проведенный из точки C к плоскости α, и, следовательно, треугольник ABC_1 — проекция треугольника ABC на эту плоскость. Пусть отрезок C_1H — высота треугольника ABC_1. Тогда отрезок CH — высота треугольника ABC (по теореме о трех перпендикулярах), а $\angle CHC_1 = \varphi$ (объясните почему). Так как

$$S_1 = \frac{1}{2}AB \cdot C_1H, \quad S = \frac{1}{2}AB \cdot CH, \quad C_1H = CH \cdot \cos\varphi,$$

то

$$S_1 = S \cdot \cos\varphi. \qquad (2)$$

б) Если сторона AB данного треугольника ABC параллельна плоскости α (рис. 78, *б*; на этом

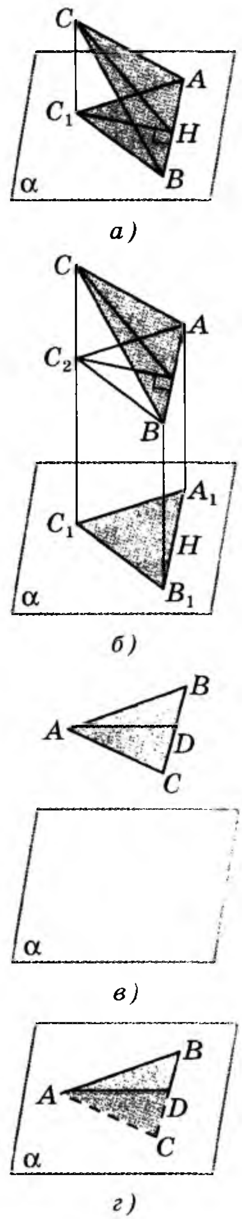


Рис. 78

рисунке треугольник $A_1B_1C_1$ — проекция треугольника ABC, плоскость ABC_2 параллельна плоскости α), то, согласно доказанному, площадь треугольника ABC_2 равна $S \cdot \cos \varphi$. Но треугольник ABC_2 равен треугольнику $A_1B_1C_1$ (докажите это), поэтому его площадь равна S_1. Таким образом, и в этом случае площадь S_1 проекции треугольника ABC с площадью S выражается формулой (2).

в) Рассмотрим, наконец, произвольный многоугольник с площадью S. Разобьем его на треугольники. Если ни одна из сторон какого-то из них не параллельна плоскости α и не лежит в ней, то разобьем этот треугольник на два треугольника отрезком, проведенным через одну из его вершин параллельно плоскости α (рис. 78, *в*), либо в самой плоскости α (рис. 78, *г*). Выразим площадь проекции каждого треугольника по формуле (2) и сложим эти площади. Вынеся за скобки общий множитель $\cos \varphi$, получим в скобках сумму площадей треугольников, т. е. площадь S данного многоугольника. Таким образом, площадь S_1 проекции многоугольника выражается формулой (2).

Воспользуемся этим для доказательства утверждения, получившего название **пространственная теорема Пифагора.**

Теорема

Если все плоские углы при одной из вершин тетраэдра — прямые, то квадрат площади грани, противолежащей этой вершине, равен сумме квадратов площадей остальных граней.

Доказательство

Рассмотрим тетраэдр $OABC$, в котором $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$. Пусть S_C, S_A, S_B и S — площади треугольников OAB, OBC, OCA и ABC, α, β, γ — величины двугранных углов с ребрами AB, BC, CA, точка D — проекция точки O на плоскость грани ABC (рис. 79). Поскольку $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$, $\gamma < 90°$ (докажите это), то точка D лежит внутри треугольника ABC. Треугольники OAB, OBC и OCA являются проекциями треугольника ABC, поэтому $S_C = S \cos \alpha$, $S_A = S \cos \beta$, $S_B = S \cos \gamma$.

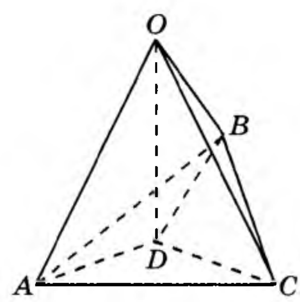


Рис. 79

Треугольники ABD, BCD и CAD являются проекциями треугольников OAB, OBC и OCA на плоскость грани ABC, причем сумма площадей этих треугольников равна площади S треугольника ABC. Таким образом,

$$(S\cos\alpha)\cdot\cos\alpha+(S\cos\beta)\cdot\cos\beta+(S\cos\gamma)\cdot\cos\gamma=$$
$$=S(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=S.$$

Следовательно, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Поэтому

$$S_C^{\,2}+S_A^{\,2}+S_B^{\,2}=S^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=S^2.$$

Теорема доказана.

Задачи

218 Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани — прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

219 В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

220 Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

221 Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

222 Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

223 Через два противолежащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.

224 Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и противолежащую сторону верхнего основания, если диагональ основания равна $4\sqrt{2}$ см.

225 Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30°. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

226 В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2 см, а ее высота равна 4 см.

227 Основание призмы — правильный треугольник ABC. Боковое ребро AA_1 образует равные углы со сторонами основания AC и AB. Докажите, что: а) $BC\perp AA_1$; б) CC_1B_1B — прямоугольник.

228 Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = 13$ см, $BC = 10$ см, а боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол в $45°$. Проекцией вершины A_1 является точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите площадь грани CC_1B_1B.

229 В правильной n-угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площади боковой и полной поверхности призмы, если: а) $n = 3$, $a = 10$ см, $h = 15$ см; б) $n = 4$, $a = 12$ дм, $h = 8$ дм; в) $n = 6$, $a = 23$ см, $h = 5$ дм; г) $n = 5$, $a = 0{,}4$ м, $h = 10$ см.

230 Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в $120°$ между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

231 Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в $60°$. Меньшая из площадей диагональных сечений* равна 130 см^2. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

232 Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с одной из боковых граней — угол α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

233 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Через ребро BB_1 проведено сечение BB_1D_1D, перпендикулярное к плоскости грани AA_1C_1C. Найдите площадь сечения, если $AA_1 = 10$ см, $AD = 27$ см, $DC = 12$ см.

234 Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если катеты равны 20 см и 21 см, а боковое ребро равно 42 см.

235 Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с острым углом φ. Через катет, противолежащий этому углу, и через противоположную этому катету вершину основания проведено сечение, составляющее угол θ с плоскостью основания. Найдите отношение площади боковой поверхности призмы к площади сечения.

236 Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения** на боковое ребро.

237 Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 12 см, а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

---

* Сечение параллелепипеда называется диагональным, если оно содержит какую-нибудь его диагональ и боковое ребро.

** Перпендикулярным сечением наклонной призмы называется ее сечение плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам и пересекающей их.

238 В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро, отстоящее от двух других боковых ребер на 12 см и 35 см, равно 24 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

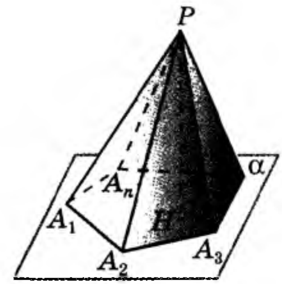
§ 2 Пирамида

32 Пирамида

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников (рис. 80):

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ \dots,\ PA_nA_1. \qquad (1)$$

Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и n треугольников (1), называется **пирамидой**. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ называется **основанием**, а треугольники (1) — **боковыми гранями** пирамиды. Точка P называется **вершиной** пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n — ее **боковыми ребрами**. Пирамиду с основанием $A_1A_2 \dots A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2 \dots A_n$ — и называют n-угольной пирамидой. На рисунке 81 изображены четырехугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида — это тетраэдр.



Пирамида. Многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ — основание пирамиды. Треугольники A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 — боковые грани, P — вершина пирамиды

Рис. 80

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется **высотой** пирамиды. На рисунке 80 отрезок PH является высотой пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (т. е. основания и боковых граней), а **площадью боковой поверхности пирамиды** — сумма площадей ее боковых граней. Очевидно, $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$.

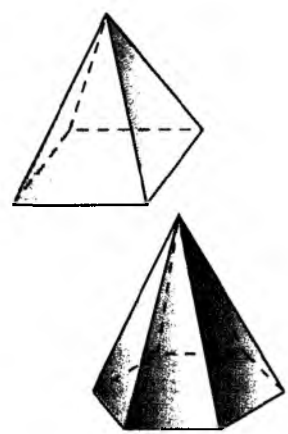


Рис. 81

33 Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если ее основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания*, является ее высотой (рис. 82).

* Напомним, что центром правильного многоугольника называется центр вписанной в него окружности.

Докажем, что **все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.**

Рассмотрим правильную пирамиду $PA_1A_2 \ldots A_n$ (см. рис. 82). Сначала докажем, что все боковые ребра этой пирамиды равны. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота PO пирамиды, а другим — радиус описанной около основания окружности (например, боковое ребро PA_1 — гипотенуза треугольника OPA_1, в котором $OP = h$, $OA_1 = R$). По теореме Пифагора любое боковое ребро равно $\sqrt{h^2 \quad R^2}$, поэтому

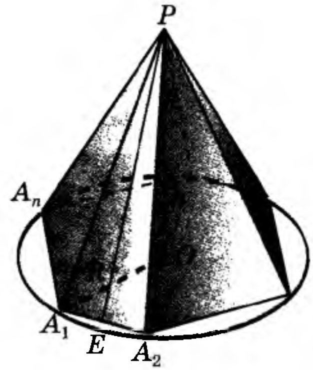


Рис. 82

$$PA_1 = PA_2 = \ldots = PA_n.$$

Мы доказали, что боковые ребра правильной пирамиды $PA_1A_2 \ldots A_n$ равны друг другу, поэтому боковые грани — равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников также равны друг другу, так как $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный многоугольник. Следовательно, боковые грани равны по третьему признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой.** На рисунке 82 отрезок PE — одна из апофем. Ясно, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

Докажем теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Теорема

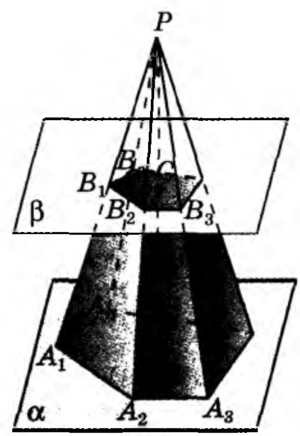
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Доказательство

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, основания которых — стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь S боковой поверхности пирамиды равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы d. Вынося множитель $\frac{1}{2}d$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т. е. его периметр. Теорема доказана.

34 Усеченная пирамида

Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2 \dots A_n$ и проведем секущую плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках $B_1, B_2, \dots, B_n$ (рис. 83). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ **(нижнее и верхнее основания)**, расположенные в параллельных плоскостях, и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ **(боковые грани)**, называется **усеченной пирамидой.**



Усеченная пирамида

Рис. 83

Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n называются **боковыми ребрами** усеченной пирамиды.

Усеченную пирамиду с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают так: $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** усеченной пирамиды. На рисунке 83 отрезок CH является высотой усеченной пирамиды.

Докажем, что **боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.** Рассмотрим, например, боковую грань $A_1A_2B_2B_1$ (см. рис. 83). Стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, поскольку принадлежат прямым, по которым плоскость PA_1A_2 пересекается с параллельными плоскостями α и β. Две другие стороны A_1B_1 и A_2B_2 этой грани не параллельны — их продолжения пересекаются в точке P. Поэтому данная грань — трапеция. Аналогично можно доказать, что и остальные боковые грани — трапеции.

Усеченная пирамида называется **правильной,** если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции (докажите это). Высоты этих трапеций называются **апофемами. Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды** называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

▼ Докажите эту теорему самостоятельно.

239 Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если высота ее проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

240 Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

241 Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

242 Основанием пирамиды является квадрат, одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания. Плоскость боковой грани, не проходящей через высоту пирамиды, наклонена к плоскости основания под углом 45°. Наибольшее боковое ребро равно 12 см. Найдите: а) высоту пирамиды; б) площадь боковой поверхности пирамиды.

243 Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC, у которого $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см; ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

244 Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник ABC, у которого гипотенуза AB равна 29 см, а катет AC равен 21 см. Боковое ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

245 Основанием пирамиды является прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы в 30° и 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды.

246 Высота треугольной пирамиды равна 40 см, а высота каждой боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, равна 41 см. а) Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в ее основание. б) Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 42 см.

247 Двугранные углы при основании пирамиды равны. Докажите, что: а) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды; б) высоты всех боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны; в) площадь боковой поверхности пирамиды равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани, проведенную из вершины пирамиды.

248 Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см и 10 см. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом $45°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

249 В пирамиде все боковые ребра равны между собой. Докажите, что: а) высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания; б) все боковые ребра пирамиды составляют равные углы с плоскостью основания.

250 Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом $120°$. Боковые ребра образуют с ее высотой, равной 16 см, углы в $45°$. Найдите площадь основания пирамиды.

251 Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник с гипотенузой BC. Боковые ребра пирамиды равны друг другу, а ее высота равна 12 см. Найдите боковое ребро пирамиды, если $BC = 10$ см.

252 Основанием пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором стороны AB и AC равны, $BC = 6$ см, высота AH равна 9 см. Известно также, что $DA = DB = DC = 13$ см. Найдите высоту пирамиды.

253 Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 6 см и $4\sqrt{6}$ см и высотой 5 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите ее высоту.

254 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, высота равна H. Найдите: а) боковое ребро пирамиды; б) плоский угол при вершине пирамиды; в) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; г) угол между боковой гранью и основанием пирамиды; д) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

255 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ. Найдите высоту этой пирамиды.

256 В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна m, а плоский угол при вершине равен α. Найдите: а) высоту пирамиды; б) боковое ребро пирамиды; в) угол между боковой гранью и плоскостью основания; г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

257 Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при стороне основания равен $45°$. Найдите площадь поверхности пирамиды.

258 Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует угол в $60°$ с плоскостью основания. Найдите площадь поверхности пирамиды, если боковое ребро равно 12 см.

259 В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен $60°$. Найдите боковое ребро пирамиды.

260 В правильной треугольной пирамиде $DABC$ через боковое ребро DC и высоту DO пирамиды проведена плоскость α. Докажите, что: а) ребро AB перпендикулярно к плоскости α; б) перпендикуляр, проведенный из вершины C к апофеме грани ADB, является перпендикуляром к плоскости ADB.

261 Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны.

262 Докажите, что плоскость, проходящая через высоту правильной пирамиды и высоту боковой грани, перпендикулярна к плоскости боковой грани.

263 В правильной пирамиде $MABCD$ точки K, L и N лежат соответственно на ребрах BC, MC и AD, причем $KN \parallel BA$, $KL \parallel BM$. а) Постройте сечение пирамиды плоскостью KLN и определите вид сечения. б) Докажите, что плоскость KLN параллельна плоскости AMB.

264 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведенного через вершину пирамиды и большую диагональ основания.

265 В правильной треугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Через сторону основания проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания. Найдите площадь получившегося сечения, если сторона основания пирамиды равна 12 см.

266 Основанием пирамиды, высота которой равна 2 дм, а боковые ребра равны друг другу, является прямоугольник со сторонами 6 дм и 8 дм. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ основания параллельно боковому ребру.

267 Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Докажите, что боковые ребра и высота пирамиды делятся этой плоскостью на пропорциональные части.

268 Плоскость, параллельная плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 дм, а площадь ее полной поверхности равна 186 дм^2. Найдите высоту усеченной пирамиды.

269 Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 дм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды.

270 Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 5 см и 3 см соответственно. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно к плоскостям оснований и равно 1 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

§ 3 Правильные многогранники

35 Симметрия в пространстве

В планиметрии мы рассматривали фигуры, симметричные относительно точки и относительно прямой. В стереометрии рассматривают симметрию относительно точки, прямой и плоскости.

Точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки O (центр симметрии)**, если O — середина отрезка AA_1 (рис. 84, *а*). Точка O считается симметричной самой себе.

Точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой a (ось симметрии)**, если прямая a проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку (рис. 84, *б*). Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

Точки A и A_1 называются **симметричными относительно плоскости α (плоскость симметрии)**, если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку (рис. 84, *в*). Каждая точка плоскости α считается симметричной самой себе.

Введем понятия центра, оси, плоскости симметрии фигуры. **Точка (прямая, плоскость) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее некоторой точке той же фигуры.** Если фигура имеет центр (ось, плоскость симметрии), то говорят, что она обладает центральной (осевой, зеркальной) симметрией.

На рисунках 85, *а*, *б*, *в* показаны центр O, ось a и плоскость α симметрии прямоугольного парал-

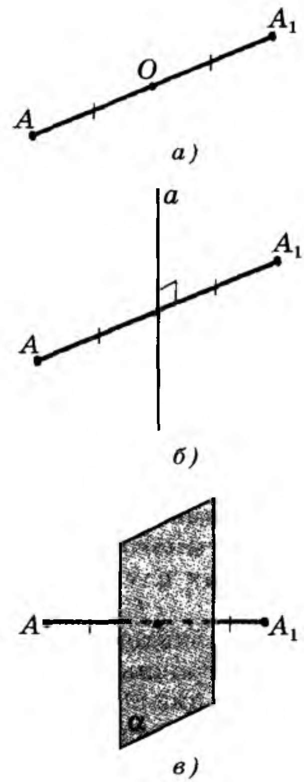


Рис. 84

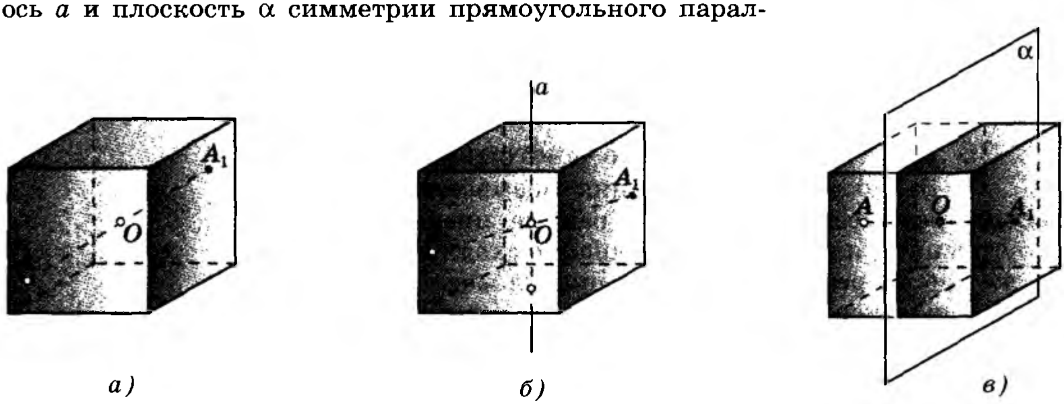


Рис. 85

лелепипеда. Параллелепипед, не являющийся прямоугольным, но являющийся прямой призмой, имеет плоскость (или плоскости, если его основание — ромб), ось и центр симметрии.

Фигура может иметь один или несколько центров симметрии (осей, плоскостей симметрии). Например, куб имеет только один центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии. Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров, осей или плоскостей симметрии. Простейшими из таких фигур являются прямая и плоскость. Любая точка плоскости является ее центром симметрии. Любая прямая (плоскость), перпендикулярная к данной плоскости, является ее осью (плоскостью) симметрии. С другой стороны, существуют фигуры, не имеющие центров, осей или плоскостей симметрии. Например, параллелепипед, не являющийся прямой призмой, не имеет оси симметрии, но имеет центр симметрии и может иметь (подумайте, в каком случае) плоскость симметрии; призма и пирамида в общем случае не имеют ни плоскости, ни оси, ни центра симметрии (плоскость, ось или центр симметрии у этих многогранников могут быть лишь в некоторых частных случаях).

С симметрией мы часто встречаемся в природе, архитектуре, технике, быту. Так, многие здания симметричны относительно плоскости, например главное здание Московского государственного университета (рис. 86), некоторые виды деталей имеют ось симметрии. Почти все кристаллы, встречающиеся в природе, имеют центр, ось или плоскость симметрии (рис. 87). В геометрии центр, оси и плоскости симметрии многогранника называются **элементами симметрии** этого многогранника.

Рис. 86

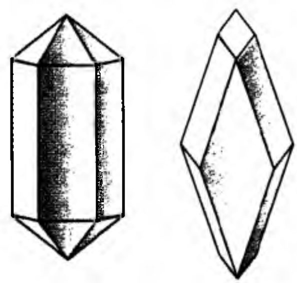


Рис. 87

36 Понятие правильного многогранника

Выпуклый многогранник называется **правильным**, если все его грани — равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Примером правильного многогранника является куб. Все его грани — равные квадраты, и к каждой вершине сходятся три ребра.

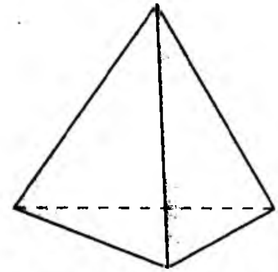
Очевидно, все ребра правильного многогранника равны друг другу. Можно доказать, что равны также все двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром.

Докажем, что **не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n-угольники при $n \geqslant 6$.** В самом деле, угол правильного n-угольника при $n \geqslant 6$ не меньше $120°$ (объясните почему). С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее трех плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани — правильные n-угольники при $n \geqslant 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше чем $120° \cdot 3 = 360°$. Но это невозможно, так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше $360°$ (п. 27).

По этой же причине каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трех, четырех или пяти равносторонних треугольников, либо трех квадратов, либо трех правильных пятиугольников. Других возможностей нет.

В соответствии с этим получаем следующие правильные многогранники:

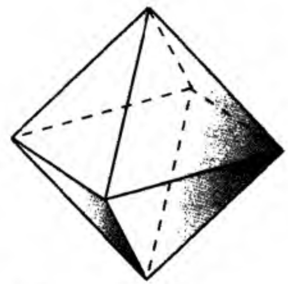
Правильный тетраэдр* (рис. 88) составлен из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $180°$.



Правильный тетраэдр

Рис. 88

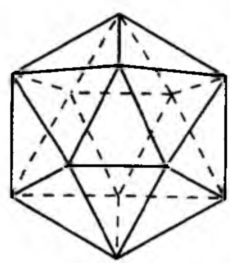
Правильный октаэдр (рис. 89) составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $240°$.



Правильный октаэдр

Рис. 89

Правильный икосаэдр (рис. 90) составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $300°$.

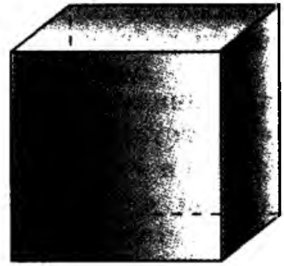


Правильный икосаэдр

Рис. 90

* Мы различаем правильный тетраэдр и правильную треугольную пирамиду. В отличие от правильного тетраэдра, все ребра которого равны, в правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны друг другу, но они могут быть не равны ребрам основания пирамиды.

Куб (рис. 91) составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трех квадратов. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 270°.



Куб

Рис. 91

Правильный додекаэдр (рис. 92) составлен из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трех правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 324°.

Других видов правильных многогранников, кроме перечисленных пяти, нет.

▼ **Замечания**

1. Число граней f, ребер k и вершин e каждого из правильных многогранников можно найти с помощью теоремы Эйлера. В самом деле, пусть n — число ребер каждой грани, m — число ребер, сходящихся к каждой вершине. Поскольку каждое ребро принадлежит двум граням, то $nf = 2k$. Кроме того, $me = 2k$ (так как каждое ребро содержит две вершины) и по теореме Эйлера $f + e - k = 2$. Из этих трех равенств находим:

$$f\quad \frac{4m}{2m\quad 2n\quad mn},\qquad k\quad \frac{2mn}{2m\quad 2n\quad mn},\qquad e\quad \frac{4n}{2m\quad 2n\quad mn}.$$

Таким образом,

у правильного тетраэдра ($n = 3$, $m = 3$):
$f = 4$, $k = 6$, $e = 4$;

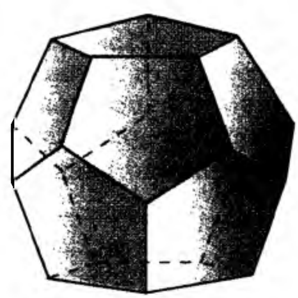
у правильного октаэдра ($n = 3$, $m = 4$):
$f = 8$, $k = 12$, $e = 6$;

у правильного икосаэдра ($n = 3$, $m = 5$):
$f = 20$, $k = 30$, $e = 12$;

у куба ($n = 4$, $m = 3$): $f = 6$, $k = 12$, $e = 8$;

у правильного додекаэдра ($n = 5$, $m = 3$):
$f = 12$, $k = 30$, $e = 20$.

2. Мы доказали, что существует не более пяти видов правильных многогранников, но не доказали, что каждый из указанных многогранников действительно существует. Существование правильного тетраэдра правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и высотой, равной $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ и куба очевидно. Центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра (докажите это), поэтому существование правильного октаэдра не вызывает сомнений. Правильный икосаэдр составлен из двух правильных пятиугольных пирамид и многогранника,



Правильный додекаэдр

Рис. 92

отдаленно напоминающего пятиугольную призму. Высоты пирамид и этого многогранника легко выражаются через ребро a (как?), поэтому существование правильного икосаэдра также не вызывает сомнений. Наконец, центры граней правильного икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра (убедитесь в этом), поэтому правильный додекаэдр тоже существует.

Отметим, что в существовании всех пяти правильных многогранников можно убедиться воочию, если склеить их из разверток (задания 271—275). △

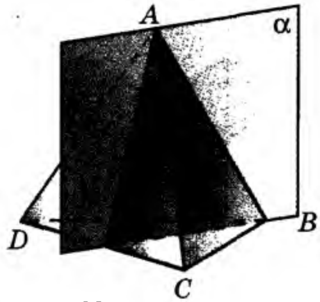


Рис. 93

37 Элементы симметрии правильных многогранников

Рассмотрим элементы симметрии правильных многогранников. **Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии.** Прямая, проходящая через середины двух противоположных ребер, является его осью симметрии. Плоскость α, проходящая через ребро AB перпендикулярно к противоположному ребру CD правильного тетраэдра $ABCD$, является плоскостью симметрии (рис. 93). **Правильный тетраэдр имеет три оси симметрии и шесть плоскостей симметрии.**

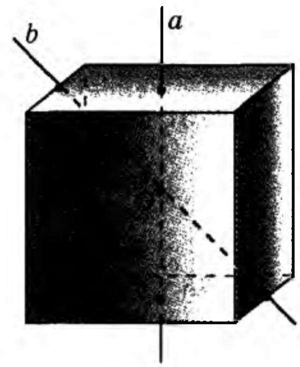


Рис. 94

Куб имеет один центр симметрии — точку пересечения его диагоналей. Прямые a и b, проходящие соответственно через центры противоположных граней и середины двух противоположных ребер, не принадлежащих одной грани, являются его осями симметрии (рис. 94). **Куб имеет девять осей симметрии.** Все оси симметрии проходят через центр симметрии. Плоскостью симметрии куба является плоскость, проходящая через любые две оси симметрии. **Куб имеет девять плоскостей симметрии.**

Правильный октаэдр, правильный икосаэдр и правильный додекаэдр имеют центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии. Попробуйте подсчитать их число.

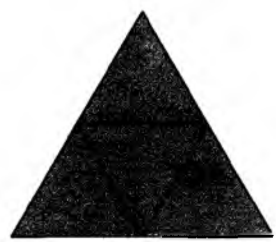


Рис. 95

Практические задания

271 Перерисуйте развертку правильного тетраэдра (рис. 95) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку (сделав необходимые припуски для склеивания) и склейте из нее тетраэдр.

272 Перерисуйте развертку куба (рис. 96) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее куб.


Рис. 96

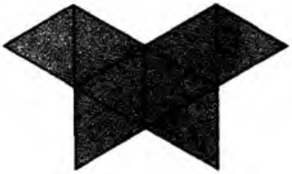


Рис. 97

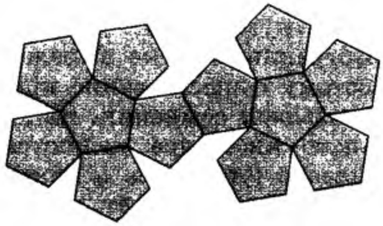


Рис. 98

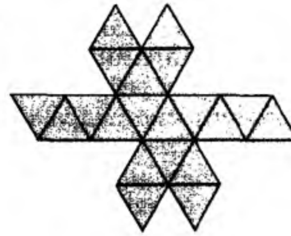


Рис. 99

273 Перерисуйте развертку правильного октаэдра (рис. 97) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее октаэдр.

274 Перерисуйте развертку правильного додекаэдра (рис. 98) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее додекаэдр.

275 Перерисуйте развертку правильного икосаэдра (рис. 99) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее икосаэдр.

Вопросы и задачи

276 Сколько центров симметрии имеет: а) параллелепипед; б) правильная треугольная призма; в) двугранный угол; г) отрезок?

277 Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) правильный треугольник; в) куб?

278 Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная четырехугольная призма, отличная от куба; б) правильная четырехугольная пирамида; в) правильная треугольная пирамида?

279 Найдите угол между двумя диагоналями граней куба, имеющими общий конец.

280 Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения, проходящего через диагонали двух его граней.

281 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершины D_1 проведены диагонали граней D_1A, D_1C и D_1B_1 и концы их соединены отрезками. Докажите, что многогранник D_1AB_1C — правильный тетраэдр. Найдите отношение площадей поверхностей куба и тетраэдра.

282 Найдите угол между двумя ребрами правильного октаэдра, которые имеют общую вершину, но не принадлежат одной грани (см. рис. 89).

283 В правильном тетраэдре $DABC$ ребро равно a. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через центр грани ABC: а) параллельно грани BDC; б) перпендикулярно к ребру AD.

284 От каждой вершины правильного тетраэдра с ребром 2 отсекают тетраэдр с ребром 1. Какая фигура получится в результате?

285 Докажите, что в правильном тетраэдре отрезки, соединяющие центры граней, равны друг другу.

286 В правильном тетраэдре h — высота, m — ребро, а n — расстояние между центрами его граней. Выразите: а) m через h; б) n через m.

287 Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите расстояние между: а) двумя его противоположными вершинами; б) центрами двух смежных граней; в) противоположными гранями.

Вопросы к главе III

1 Какое наименьшее число ребер может иметь многогранник?

2 Призма имеет n граней. Какой многоугольник лежит в ее основании?

3 Является ли призма прямой, если две ее смежные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания?

4 В какой призме боковые ребра параллельны ее высоте?

5 Является ли призма правильной, если все ее ребра равны друг другу?

6 Может ли высота одной из боковых граней наклонной призмы являться и высотой призмы?

7 Существует ли призма, у которой: а) боковое ребро перпендикулярно только одному ребру основания; б) только одна боковая грань перпендикулярна к основанию?

8 Правильная треугольная призма разбивается плоскостью, проходящей через средние линии оснований, на две призмы. Как относятся площади боковых поверхностей этих призм?

9 Будет ли пирамида правильной, если ее боковыми гранями являются правильные треугольники?

10 Сколько граней, перпендикулярных к плоскости основания, может иметь пирамида?

11 Существует ли четырехугольная пирамида, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию?

12 Могут ли все грани треугольной пирамиды быть прямоугольными треугольниками?

13 Можно ли из куска проволоки длиной 66 см изготовить каркасную модель правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной 10 см?

14 На какие многогранники рассекается треугольная призма плоскостью, проходящей через вершину верхнего основания и противолежащую ей сторону нижнего основания?

Дополнительные задачи

288 Докажите, что число вершин любой призмы четно, а число ребер кратно 3.

289 Докажите, что площадь полной поверхности куба равна $2d^2$, где d — диагональ куба.

290 Угол между диагональю основания прямоугольного параллелепипеда, равной l, и одной из сторон основания равен φ. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен θ. Найдите площадь боковой поверхности данного параллелепипеда.

291 В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с одной из сторон основания — угол θ. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

292 В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 6 см, боковое ребро равно 8 см. Найдите расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.

293 В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали B_1D и D_1B взаимно перпендикулярны. Докажите, что угол между диагоналями A_1C и B_1D призмы равен $60°$.

294 Правильная четырехугольная призма пересечена плоскостью, содержащей две ее диагонали. Площадь сечения равна S_0, а сторона основания a. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

295 Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб. Боковое ребро CC_1 составляет равные углы со сторонами основания CD и CB. Докажите, что: а) $CC_1 \perp BD$; б) BB_1D_1D — прямоугольник; в) $BD \perp AA_1C_1$; г) $AA_1C_1 \perp BB_1D_1$.

296 Высота правильной треугольной призмы равна h. Плоскость α, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый двугранный угол φ. Найдите площадь сечения призмы плоскостью α.

297 Основанием треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC, BD — высота этого треугольника, а вершина A_1 проектируется в его центр. Докажите, что: а) $A_1BD \perp AA_1C_1$; б) $AA_1O \perp BB_1C$; в) грань BB_1C_1C — прямоугольник.

298 Основание параллелепипеда с боковым ребром b — квадрат со стороной a. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от вершин нижнего основания. Найдите площадь полной поверхности.

299 Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна m, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.

300 В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точки E, F и P — середины сторон BC, AB и AD. Определите вид сечения, проходящего через эти точки, и найдите его площадь, если сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно b.

301 Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды $DABC$ равен $120°$. Расстояние от вершины B до бокового ребра DA равно 16 см. Найдите апофему пирамиды.

302 Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 3 см и 7 см и одной из диагоналей 6 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 см. Найдите боковые ребра пирамиды.

303 Основанием пирамиды является ромб. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют двугранный угол в $120°$, а две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в $30°$. Найдите площадь поверхности пирамиды, если ее высота равна 12 см.

304 В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $60°$. Докажите, что двугранный угол между боковой

гранью и основанием пирамиды вдвое меньше двугранного угла при боковом ребре.

305 В правильной четырехугольной пирамиде высота равна h, плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь боковой поверхности.

306 Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h и составляет угол φ с плоскостью боковой грани. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

307 В правильной пирамиде $MABCD$ $AM = b$, $AD = a$. а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через диагональ BD основания параллельно ребру MA, и найдите площадь сечения. б) Докажите, что точки M и C равноудалены от плоскости α.

308 Основанием пирамиды является ромб со стороной 5 см и меньшей диагональю 6 см. Высота пирамиды, равная 3,2 см, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найдите высоты боковых граней пирамиды, проведенные из ее вершины.

309 Основанием пирамиды с равными боковыми ребрами является прямоугольник со сторонами 6 дм и 8 дм. Высота пирамиды равна 6 дм. Найдите площадь сечения, проведенного через меньшую сторону и середину высоты.

310 В пирамиде $DABC$ ребро DA перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AB = AC = 25$ см, $BC = 40$ см, $DA = 8$ см.

311 Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник со сторонами $AC = 13$ см, $AB = 15$ см, $CB = 14$ см. Боковое ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. а) Найдите площадь полной поверхности пирамиды. б) Докажите, что основание перпендикуляра, проведенного из вершины A к плоскости грани BDC, лежит на высоте этой грани, и найдите длину этого перпендикуляра.

312 В правильной n-угольной пирамиде боковые грани составляют с плоскостью основания угол φ. Найдите тангенс угла между плоскостью основания и боковым ребром.

313 Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 12 дм и 6 дм, а ее высота 1 дм. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

314 В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 63 см, апофема — 65 см, а стороны оснований относятся как 7 : 3. Найдите стороны оснований пирамиды.

315 Докажите, что центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба.

316 Докажите, что центры граней правильного тетраэдра являются вершинами другого правильного тетраэдра.

317 Докажите, что центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра.

318 Докажите, что сумма двугранного угла правильного тетраэдра и двугранного угла правильного октаэдра равна 180°.

319 Сколько плоскостей симметрии, проходящих через данную вершину, имеет правильный тетраэдр?

Глава IV
Векторы в пространстве

§ 1 Понятие вектора в пространстве

38 Понятие вектора

В курсе планиметрии мы познакомились с векторами на плоскости и действиями над ними. Основные понятия для векторов в пространстве вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется **вектором**. Направление вектора (от начала к концу) на рисунках отмечается стрелкой. Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет какого-либо определенного направления. На рисунке 100, *а* изображены ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и нулевой вектор $\overrightarrow{TT}$, а на рисунке 100, *б* — ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, имеющие общее начало. Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$.

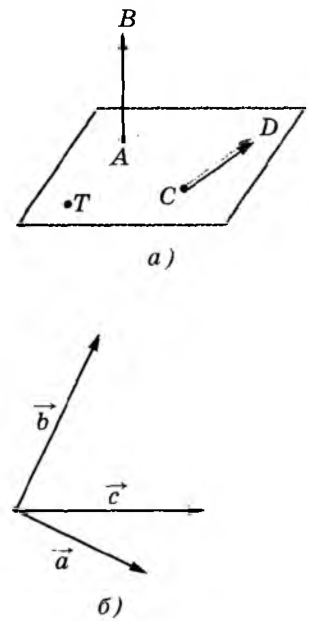


Рис. 100

Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **сонаправленными**, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **противоположно направленными**. Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором. Запись $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ обозначает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, а запись $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$ — что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены. На рисунке 101 изображен параллелепипед. На этом рисунке $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$; векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$ не являются ни сонаправленными, ни противоположно направленными, так как они не коллинеарны.

Изучая векторы на плоскости, мы отмечали, что многие физические величины, например сила, перемещение, скорость, являются векторными величинами. При изучении электрических и магнитных явлений появляются новые примеры векторных величин. Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами, характеризуется в каждой точке пространства вектором напряженности электрического поля. На рисунке 102, *а* изображены векторы напряженности электрического поля положительного точечного заряда.

Электрический ток, т. е. направленное движение зарядов, создает в пространстве магнитное поле, которое характеризуется в каждой точке пространства вектором магнитной индукции. На рисунке 102, *б* изображены векторы магнитной индукции магнитного поля прямого проводника с током.

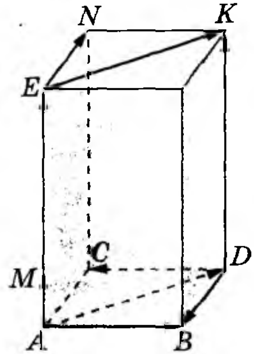


Рис. 101

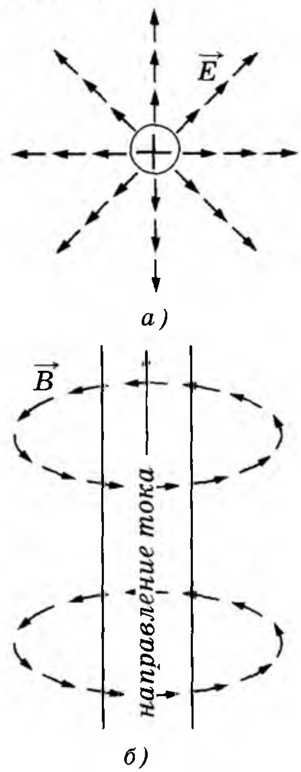


Рис. 102

39 Равенство векторов

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны. На рисунке 101 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DK}$, так как $\overrightarrow{AE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$ и $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DK}|$, а $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.

Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен** от точки A. Нетрудно доказать, что **от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.** В самом деле, пусть $\vec{a}$ — данный вектор, M — данная точка (рис. 103). Проведем через начало и конец вектора $\vec{a}$ и точку M плоскость и в этой плоскости построим вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{MN}$ искомый. Из построения ясно также, что $\overrightarrow{MN}$ — единственный вектор с началом M, равный вектору $\vec{a}$.

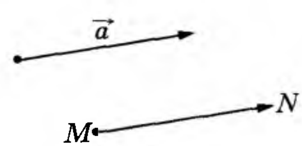


Рис. 103

Вопросы и задачи

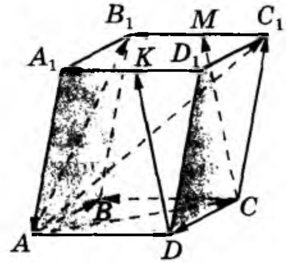


Рис. 104

320 В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и K — середины ребер AC, BC и CD соответственно, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $BD = 5$ см. Найдите длины векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{NK}$;

б) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{KN}$.

321 Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют длины: $AD = 8$ см, $AB = 9$ см и $AA_1 = 12$ см. Найдите длины векторов:

а) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB_1}$.

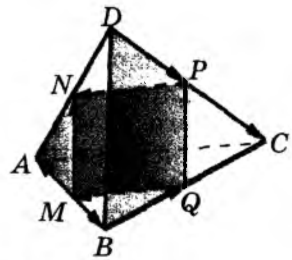


Рис. 105

322 На рисунке 104 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и K — середины ребер B_1C_1 и A_1D_1. Укажите на этом рисунке все пары:
а) сонаправленных векторов;
б) противоположно направленных векторов;
в) равных векторов.

323 На рисунке 105 изображен тетраэдр $ABCD$, ребра которого равны. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, AD, DC, BC.
а) Выпишите все пары равных векторов, изображенных на этом рисунке. б) Определите вид четырехугольника $MNPQ$.

324 Справедливо ли утверждение:
а) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, коллинеарны между собой; б) два вектора, сонаправленные с ненулевым вектором, сонаправлены; в) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, сонаправлены?

325 Известно, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$. Как расположены по отношению друг к другу:
а) прямые AB и A_1B_1; б) прямая AB и плоскость, проходящая через точки A_1 и B_1; в) плоскости, одна из которых проходит через точки A и B, а другая проходит через точки A_1 и B_1?

326 На рисунке 104 изображен параллелепипед, точки M и K — середины ребер B_1C_1 и A_1D_1. Назовите вектор, который получится, если отложить:

а) от точки C вектор, равный $\overrightarrow{DD_1}$; б) от точки D вектор, равный $\overrightarrow{CM}$; в) от точки A_1 вектор, равный $\overrightarrow{AC}$; г) от точки C_1 вектор, равный $\overrightarrow{CB}$; д) от точки M вектор, равный $\overrightarrow{KA_1}$.

§ 2 Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

40 Сложение и вычитание векторов

Введем правило сложения двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$ (рис. 106). Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Это правило сложения векторов называется **правилом треугольника**. Рисунок 106, *а* поясняет это название. Отметим, что по этому же правилу складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении и не получается треугольника. Рисунки 106, *б*, *в* иллюстрируют сложение коллинеарных векторов.

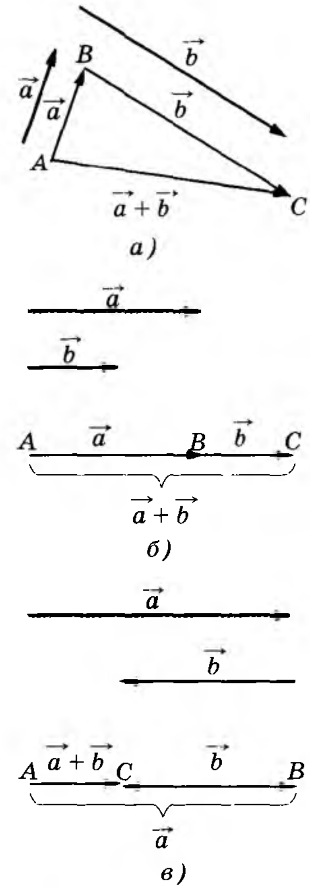


Рис. 106

Точно так же, как в планиметрии, доказывается, что **сумма $\vec{a} + \vec{b}$ не зависит от выбора точки A, от которой при сложении откладывается вектор $\vec{a}$.** Иными словами, если при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу треугольника точку A заменить другой точкой A_1, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 107). Докажите это утверждение самостоятельно.

Правило треугольника можно сформулировать в такой форме: **для любых трех точек A, B и C имеет место равенство**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Для сложения двух неколлинеарных векторов можно пользоваться также правилом параллелограмма, известным из курса планиметрии. Это правило пояснено на рисунке 108.

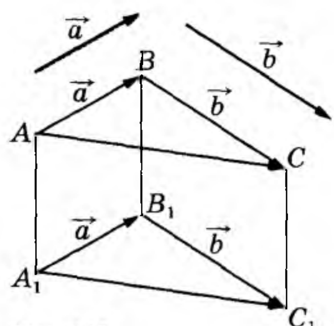


Рис. 107

Свойства сложения векторов, изученные в планиметрии, имеют место и для векторов в пространстве. Напомним их.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон);

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).

Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если их длины равны и они противоположно направлены. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор. Очевидно, вектор $\overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$ (рис. 109).

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Разность $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}), \qquad (1)$$

где $(-\vec{b})$ — вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.

На рисунках 110, *а*, *б* представлены два способа построения разности двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

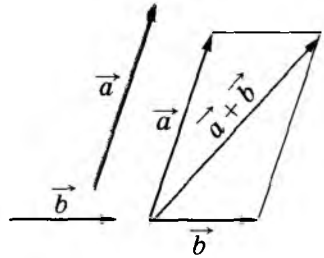
Доказательства законов сложения и равенства (1) для векторов в пространстве ничем не отличаются от доказательств для векторов на плоскости.

41 Сумма нескольких векторов

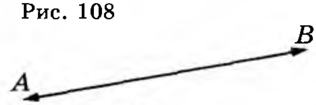
Сложение нескольких векторов в пространстве выполняется так же, как и на плоскости: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что **сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**

На рисунке 111 показано построение суммы трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: от произвольной точки O отложен вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, затем от точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, и, наконец, от точки B отложен вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. В результате получается вектор $\overrightarrow{OC}$, равный $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

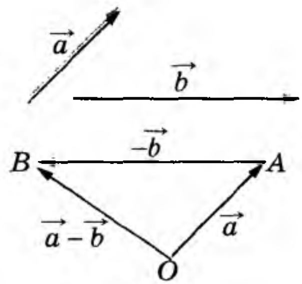
Аналогично можно построить сумму любого числа векторов. На рисунке 112 построена сумма $\overrightarrow{OE}$ пяти векторов: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$. Это правило построения суммы нескольких векторов называется **правилом многоугольника**. Заметим, однако, что, **в отличие от** случая векторов на плоскости, «многоугольник», который получается при построении суммы векторов в пространстве, может оказаться пространственным, т. е. таким, у которого не все вершины лежат в одной плоскости. Таковым является, например, «четырехугольник» *OABC* на рисунке 111, с помощью которого построен вектор $\overrightarrow{OC}$.



Правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов
Рис. 108



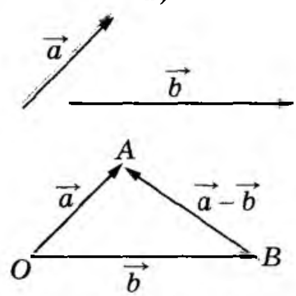
$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ — противоположные векторы
Рис. 109



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

а)



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

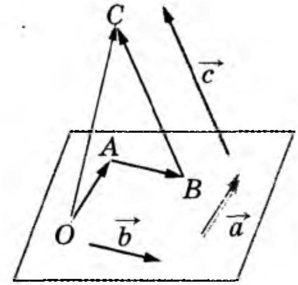
$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

Рис. 110 *б)*

Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные точки, то

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

Это правило проиллюстрировано на рисунке 113 для $n = 7$. Отметим, что если точки A_1 и A_n, т. е. начало первого вектора и конец последнего, совпадают, то сумма векторов равна нулевому вектору.



$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Рис. 111

42 Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. Из определения произведения вектора на число следует, что **для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.** Из этого определения следует также, что **произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.**

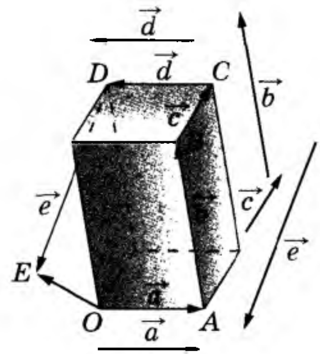


Рис. 112

Напомним основные свойства умножения вектора на число, известные нам для векторов на плоскости. Они имеют место и для векторов в пространстве. **Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:**

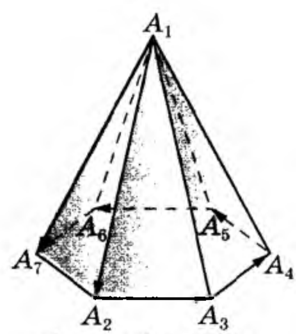
$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон);

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (первый распределительный закон);

$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (второй распределительный закон).

Отметим, что $(-1)\vec{a}$ является вектором, противоположным вектору $\vec{a}$, т. е. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$. Действительно, длины векторов $(-1)\vec{a}$ и $\vec{a}$ равны: $|(-1)\vec{a}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$. Кроме того, если вектор $\vec{a}$ ненулевой, то векторы $(-1)\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены.

Точно так же, как в планиметрии, можно доказать, что **если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует число k такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$.**



$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_6A_7} = \overrightarrow{A_1A_7}$

Рис. 113

Задачи

327 На рисунке 104 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{B_1B}$; г) $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB}$; д) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC}$.

328 Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.

329 Назовите все векторы, образованные ребрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, которые: а) противоположны вектору $\overrightarrow{CB}$; б) противоположны вектору $\overrightarrow{B_1A}$; в) равны вектору $-\overrightarrow{DC}$; г) равны вектору $-\overrightarrow{A_1B_1}$.

330 Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и обозначьте векторы $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AD}$ соответственно через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Изобразите на рисунке векторы: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{c}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $\vec{c} - \vec{b}$; д) $\vec{c} - \vec{a}$.

331 Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а O — произвольная точка пространства. Докажите, что: а) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

332 На рисунке 104 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Представьте векторы $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{DK}$ в виде разности двух векторов, начала и концы которых совпадают с отмеченными на рисунке точками.

333 В пространстве даны четыре точки A, B, C и D. Назовите вектор с началом и концом в данных точках, равный сумме векторов: а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$; б) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{DC}$.

334 Дан прямоугольный параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Докажите, что: а) $|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MM_1}| = |\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MM_1}|$; б) $|\overrightarrow{K_1L_1} - \overrightarrow{NL_1}| = |\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MM_1}|$; в) $|\overrightarrow{NL} - \overrightarrow{M_1L}| = |\overrightarrow{K_1N} - \overrightarrow{LN}|$.

335 Упростите выражение: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$; б) $\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{QK} + \overrightarrow{PF}$; в) $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{NM}$.

336 Даны точки A, B, C и D. Представьте вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде алгебраической суммы следующих векторов: а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$.

337 Упростите выражение: а) $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$; в) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$.

338 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}$, где O — произвольная точка пространства.

339 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, такой, что: а) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{CD_1} + \vec{x} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA} + \vec{x} + \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.

340 Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что: а) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \vec{x} = \overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{BB_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \vec{x} + \overrightarrow{BC_1}$.

341 Основанием четырехугольной пирамиды с вершиной P является трапеция $ABCD$. Точка O — середина средней линии трапеции. Докажите, что $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$.

342 Точка P — вершина правильной шестиугольной пирамиды. Докажите, что сумма всех векторов с началом в точке P, образованных боковыми ребрами пирамиды, равна сумме всех векторов с началом в точке P, образованных апофемами.

343 Известно, что $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Докажите, что точки A и B симметричны относительно точки O.

344 Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найдите число k такое, что: а) $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC_1} = k \cdot \overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{B_1D}$.

345 Точки E и F — середины оснований AB и BC параллелограмма $ABCD$, а O — произвольная точка пространства. Выразите: а) вектор $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$ через вектор $\overrightarrow{EF}$; б) вектор $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE}$ через вектор $\overrightarrow{DC}$.

346 Точки M и N — середины оснований AB и CD трапеции $ABCD$, а O — произвольная точка пространства. Выразите вектор $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$ через векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

347 Упростите: а) $2(\vec{m} + \vec{n}) - 3(4\vec{m} - \vec{n}) + \vec{m}$; б) $\vec{m} - 3(\vec{n} - 2\vec{m} + \vec{p}) + 5(\vec{p} - 4\vec{m})$.

348 Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{B_1D} = 2\overrightarrow{BC}$.

349 Три точки A, B и M удовлетворяют условию $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$, где $\lambda \neq -1$. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой и для любой точки O пространства выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$.

Решение

Из равенства $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ следует, что векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ коллинеарны, поэтому прямые AM и MB либо параллельны, либо совпадают. Так как эти прямые имеют общую точку M, то они совпадают, и, следовательно, точки A, B и M лежат на одной прямой. Поскольку $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, то из равенства $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ имеем $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, или $(1 + \lambda)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}$. Отсюда, разделив на $1 + \lambda$, получаем искомое равенство.

350 Известно, что $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, причем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно не сонаправлены. Докажите, что $|\vec{p}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

351 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$, а также $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Докажите, что коллинеарны векторы: а) $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{c}$; г) $-\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{c}$.

352 Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

353 Векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

354 Докажите, что если векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ не коллинеарны, то не коллинеарны и векторы: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$.

§3 Компланарные векторы

43 Компланарные векторы

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Ясно, что любые два вектора компланарны; три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны (объясните почему), а три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке 114 изображен параллелепипед. Векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны, так как если отложить от точки O вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$, то получится вектор $\overrightarrow{OC}$, а векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ лежат в одной плоскости OCE. Векторы $\overrightarrow{OA}$,

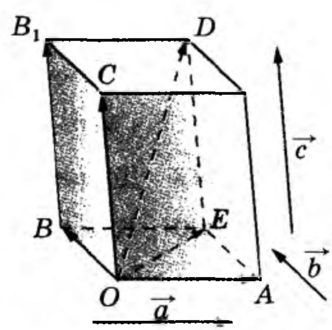


Рис. 114

$\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{OC}$ не лежит в плоскости OAB. Рассмотрим признак компланарности трех векторов.

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \qquad (1)$$

где x и y — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Докажем этот признак. Будем считать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна). Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 115). Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат в плоскости OAB. Очевидно, в этой же плоскости лежат векторы $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, а следовательно, и их сумма — вектор $\overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$, равный вектору $\vec{c}$. Итак, векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости, т. е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

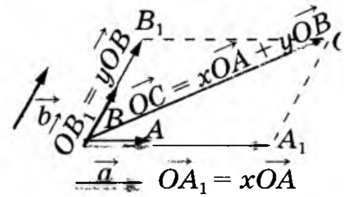


Рис. 115

Справедливо и обратное утверждение: **если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$** (т. е. представить в виде (1)), **причем коэффициенты разложения** (т. е. числа x, y в формуле (1)) **определяются единственным образом.** Пользуясь теоремой о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам, известной из курса планиметрии, докажите это утверждение самостоятельно.

44 Правило параллелепипеда

Для сложения трех некомпланарных векторов можно пользоваться так называемым **правилом параллелепипеда.** Опишем его. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были его ребрами (см. рис. 114). Тогда диагональ OD этого параллелепипеда изображает сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Действительно, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

45 Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \qquad (2)$$

где x, y и z — некоторые числа, то говорят, что **вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$**. Числа x, y, z называются **коэффициентами разложения.**

Докажем теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Теорема

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — данные некомпланарные векторы. Докажем сначала, что любой вектор $\vec{p}$ можно представить в виде (2).

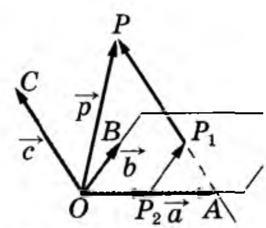


Рис. 116

Отметим произвольную точку O и отложим от этой точки векторы (рис. 116):

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c},\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}. \qquad (3)$$

Через точку P проведем прямую, параллельную прямой OC, и обозначим через P_1 точку пересечения этой прямой с плоскостью AOB (если $P \in OC$, то в качестве точки P_1 возьмем точку O). Затем через точку P_1 проведем прямую, параллельную прямой OB, и обозначим через P_2 точку пересечения этой прямой с прямой OA (если $P_1 \in OB$, то в качестве точки P_2 возьмем точку O). По правилу многоугольника

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}. \qquad (4)$$

Векторы $\overrightarrow{OP_2}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарны, поэтому существуют числа x, y, z такие, что $\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$. Подставив эти выражения в равенство (4), получим:

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Отсюда, учитывая равенства (3), приходим к равенству (2).

Докажем теперь, что коэффициенты разложения в формуле (2) определяются единственным образом. Допустим, что наряду с разложением (2) имеется другое разложение вектора $\vec{p}$: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$. Вычитая это равенство из равенства (2) и используя свойства действий над векторами, получаем:

$$\vec{0} = (x - x_1)\,\vec{a} + (y - y_1)\,\vec{b} + (z - z_1)\,\vec{c}.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$. В самом деле, если предположить, например, что $z - z_1 \neq 0$, то из этого равенства находим: $\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}$, откуда следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Но это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение неверно, и $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Следовательно, коэффициенты разложения (2) определяются единственным образом. Теорема доказана.

Если векторы $\vec{p}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, то $z = 0$ (объясните почему), и вектор $\vec{p}$ оказывается фактически разложенным по двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вопросы и задачи

355 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие из следующих трех векторов компланарны: а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$; в) $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$?

356 Точки E и F — середины ребер AC и BD тетраэдра $ABCD$. Докажите, что $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$. Компланарны ли векторы $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$?

357 Даны параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ компланарны.

358 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{BB_1}$; г) $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$.

359 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Разложите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. б) Разложите вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$.

360 В вершинах A_1, B и D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, помещены точечные заряды q. а) Выразите результирующую напряженность* создаваемого ими электрического поля в точках A и C_1 через вектор $\overrightarrow{AC_1}$. б) Найдите абсолютную величину результирующей напряженности в точках C, B_1, в центре грани $A_1B_1C_1D_1$ и в центре куба.

361 Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Разложите векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{D_1O}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

362 Точка K — середина ребра BC тетраэдра $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Решение

Так как точка K — середина отрезка BC, то $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$.

Но $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{c}$. Поэтому

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

363 Основанием пирамиды с вершиной O является параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Разложите векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

364 Точка K — середина ребра B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ и найдите длину этого вектора, если ребро куба равно m.

365 Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка O. Точка M — середина AB, а точка K — середина MD. Разложите векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

366 Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а O — произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \qquad (5)$$

---

* Если в точке O находится точечный заряд q, то напряженность $\vec{E}$ создаваемого им электрического поля в точке M выражается формулой $\vec{E} = \frac{kq}{OM^3} \cdot \overrightarrow{OM}$, где коэффициент k зависит от выбора системы единиц.

Решение

По теореме о точке пересечения медиан треугольника $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MA_1}$, где AA_1 — медиана треугольника ABC (рис. 117). Согласно задаче 349 $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}}{1+2} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}}{3}$. Но $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (объясните почему), поэтому $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

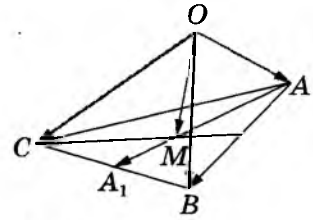


Рис. 117

367 В тетраэдре $ABCD$ медиана AA_1 грани ABC делится точкой K так, что $AK : KA_1 = 3 : 7$. Разложите вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

368 Точки M и N являются серединами ребер AB и A_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите, если это возможно, по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ вектор: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CM}$; в) $\overrightarrow{C_1N}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1N}$; е) $\overrightarrow{AN}$; ж) $\overrightarrow{MD}$.

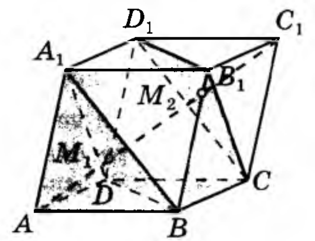


Рис. 118

369 Медианы грани ABC тетраэдра $OABC$ пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{OA}$ по векторам $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$.

370 Высоты AM и DN правильного тетраэдра $ABCD$ пересекаются в точке K. Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ вектор: а) $\overrightarrow{DN}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{AM}$; г) $\overrightarrow{MK}$.

371 В тетраэдре $ABCD$ медианы грани BCD пересекаются в точке O. Докажите, что длина отрезка AO меньше одной трети суммы длин ребер с общей вершиной A.

372 Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1 и делится этими точками на три равных отрезка (рис. 118).

Решение

Обозначим через M_1 точку пересечения медиан треугольника A_1BD. Применив формулу (5) к тетраэдру AA_1BD, получим $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}$, поэтому $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Отсюда следует, что точка M_1 принадлежит диагонали AC_1 и $AM_1 = \frac{1}{3}AC_1$.

Точно так же можно доказать, что точка M_2 пересечения медиан треугольника CB_1D_1 принадлежит диагонали AC_1 и $C_1M_2 = \frac{1}{3}AC_1$. Из равенств $AM_1 = \frac{1}{3}AC_1$ и $C_1M_2 = \frac{1}{3}AC_1$ следует, что точки M_1 и M_2 делят диагональ AC_1 параллелепипеда на три равных отрезка AM_1, M_1M_2 и M_2C_1.

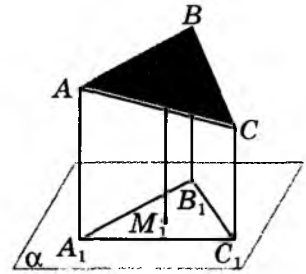


Рис. 119

373 Точки A_1, B_1, C_1 и M_1 — основания перпендикуляров, проведенных к плоскости α из вершин треугольника ABC и из точки M пересечения медиан этого треугольника (рис. 119). Докажите, что $MM_1 = \frac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1)$. Останется ли верным равенство, если какие-то стороны треугольника ABC пересекаются с плоскостью α?

374 Отрезки AB и CD не лежат в одной плоскости, точки M и N — середины этих отрезков. Докажите, что $MN < \frac{1}{2}(AC + BD)$.

375 В тетраэдре $ABCD$ точки K и M — середины ребер AB и CD. Докажите, что середины отрезков KC, KD, MA и MB являются вершинами некоторого параллелограмма.

Вопросы к главе IV

1 Справедливо ли утверждение: а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны; б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены; в) любые два равных вектора коллинеарны; г) любые два сонаправленных вектора равны; д) если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$; е) существуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

2 Точки A и C симметричны относительно точки O и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Симметричны ли точки B и D относительно точки O?

3 Точки A и C симметричны относительно прямой a и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Могут ли точки B и D быть: а) симметричными относительно прямой a; б) несимметричными относительно прямой a?

4 Точки A и C, а также точки B и D симметричны относительно плоскости α. Могут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ быть: а) равными; б) неравными?

5 Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

6 Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из слагаемых?

7 Может ли длина суммы нескольких ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?

8 Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?

9 Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной разности длин этих векторов?

10 Может ли длина суммы двух ненулевых векторов быть равна длине разности этих векторов?

11 На какое число нужно умножить ненулевой вектор $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:
а) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $|\vec{b}| = |\vec{a}|$; б) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|$; в) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$; г) $\vec{b} = \vec{0}$?

12 Известно, что $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, причем точки A, B и C не лежат на одной прямой. При каком значении k прямые AC и BD являются: а) параллельными; б) пересекающимися? Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися?

13 Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$, $3\vec{b}$; б) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$?

14 Известно, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$; б) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b} - 3\vec{c}$?

15 Точки A, B и C лежат на окружности, а точка O не лежит в плоскости этой окружности. Могут ли векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ быть компланарными?

Дополнительные задачи

376 Дан параллелепипед $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{M_1Q_1} = \overrightarrow{N_1P_1} + \overrightarrow{NP}$; б) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NQ_1}$; в) $\overrightarrow{Q_1P_1} + \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{QP_1}$.

377 На рисунке 120 изображен правильный октаэдр. Докажите, что:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EC}$;
в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AF}$.

378 Докажите, что разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

379 Дан тетраэдр $ABCD$. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

380 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$;
б) $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1A}$;
в) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

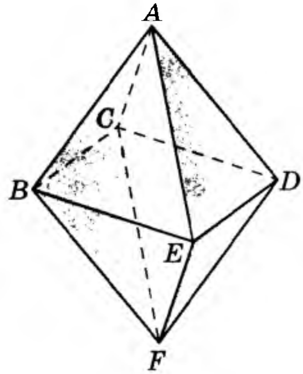


Рис. 120

381 Даны треугольники ABC, $A_1B_1C_1$ и две точки O и P пространства. Известно, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC_1}$. Докажите, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно равны и параллельны сторонам треугольника ABC.

382 При каких значениях k в равенстве $\vec{a}=k\vec{b}$, где $\vec{b}\neq\vec{0}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) коллинеарны; б) сонаправлены; в) противоположно направлены; г) являются противоположными?

383 Числа k и l не равны друг другу. Докажите, что если векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{a}+l\vec{b}$ не коллинеарны, то: а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $\vec{a}+k_1\vec{b}$ и $\vec{a}+l_1\vec{b}$ не коллинеарны при любых неравных числах k_1 и l_1.

384 Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC, точка O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

385 Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точке M. Точка O — произвольная точка пространства. Докажите, что справедливо равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

386 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что для любой точки M пространства справедливо неравенство $MO<\frac{1}{4}(MA+MB+MC+MD)$.

387 Три точки M, N и P лежат на одной прямой, а точка O не лежит на этой прямой. Выразите вектор $\overrightarrow{OP}$ через векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, если: а) $\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{MP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$; в) $\overrightarrow{MP}=k\cdot\overrightarrow{MN}$, где k — данное число.

388 Докажите, что векторы $\vec{p}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, если: а) один из данных векторов нулевой; б) два из данных векторов коллинеарны.

389 На двух скрещивающихся прямых отмечены по три точки: A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3, причем $\overrightarrow{A_1A_2}=k\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{B_1B_2}=k\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 параллельны некоторой плоскости.

390 Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=AD=a$, $AA_1=2a$. В вершинах B_1 и D_1 помещены заряды q, а в вершине A — заряд $2q$. Найдите абсолютную величину результирующей напряженности электрического поля: а) в точке A_1; б) в точке C; в) в центре грани $A_1B_1C_1D_1$; г) в центре грани $ABCD$.

391 В тетраэдре $ABCD$ точка K — середина медианы BB_1 грани BCD. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$.

392 На трех некомпланарных векторах $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{q} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{r} = \overrightarrow{AA_1}$ построен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы, образованные диагоналями этого параллелепипеда.

393 В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра CC_1. Разложите вектор: а) $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$ по векторам $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$.

394 В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани DCC_1D_1 пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

395 Докажите, что если точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны некоторой плоскости.

396 В тетраэдре $ABCD$ точка M — середина ребра BC. Выразите через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ следующие векторы: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DM}$.

397 В тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются соответственно точками пересечения медиан граней ADB и BDC. Докажите, что $MN \parallel AC$, и найдите отношение длин этих отрезков.

398 Треугольники ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены так, что точки A, B, C являются серединами отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат на одной прямой.

399 Докажите, что треугольник, вершинами которого являются точки пересечения медиан боковых граней тетраэдра, подобен основанию тетраэдра.